Adriaan Kragten, Sint-Oedenrode 10-3-2018

De harmonische stemming voor klavierinstrumenten

1 Inleiding

Op mijn niet commerciële website: www.kdwindturbines.nl staat onder het menu “No wind energy” de notitie “Harmonisch intoneren”. In deze notitie van 23 pagina’s wordt, wat ik noem, “de harmonische stemming” beschreven maar er worden ook zes alternatieve harmonische stemmingen beschreven.

Als een snaar aangeslagen wordt dan klinken er behalve de grondtoon ofte wel de 1e harmonische ook gelijktijdig een hele reeks hogere harmonischen mee waarvan de frequenties evenredig zijn met het rangnummer van de betreffende hogere harmonische. Bij wat ik noem, “de harmonische stemming”, werden alle chromatische tonen voor de toonaard A direct of indirect afgeleid van de 1e t/m de 20e hogere harmonischen. Deze stemming is in andere toonaarden dan A ontzettend vals en lijkt mij daardoor alleen bruikbaar voor zang of voor instrumenten die geen vaste tonen produceren, zoals strijkinstrumenten, omdat daarvoor ook alle andere tonen als grondtoon gekozen kunnen worden. Bij de zes alternatieve harmonische stemmingen wordt in ieder geval de reine kwint en de reine kwart harmonisch gestemd. Voor het 6e alternatief wordt de C als grondtoon gekozen en dit 6e alternatief blijkt acht toonaarden te hebben waarvoor de reine kwint en de reine kwart beiden harmonisch zijn. Dit 6e alternatief lijkt daarom de beste stemming voor een klavierinstrument te zijn, als men dit niet gelijkzwevend wil stemmen. Deze 6e alternatieve harmonische stemming wordt daarom in deze aparte notitie toegelicht waardoor men niet alle andere opties ook hoeft door te lezen. De beschrijving van dit 6e alternatief wordt “de harmonische stemming voor klavierinstrumenten” genoemd en is wel wat uitgebreider dan het 6e alternatief in de notitie “Harmonisch intoneren” omdat nu niet naar eerder alternatieven kan worden verwezen.

2 De harmonische stemming voor klavierinstrumenten

Vroeger werden klavierinstrumenten gestemd met harmonische reine kwinten omdat hiermee gemakkelijk waar te nemen is wanneer er geen zweving optreedt tussen de 3e harmonische van de laagste toon en de 2e harmonische van de hoogste toon. Deze stemming heeft echter als nadeel dat de onzuiverheid groter wordt naarmate er meer kwinten op elkaar gestapeld worden. Dit komt omdat twaalf gestapelde harmonische reine kwinten niet precies zeven octaven oplevert. Immers, $3/2^{12} = 129{,}74634$ en $2^7 = 128$.

Stel nu eens dat we in plaats van de A, de C als grondtoon kiezen van de centrale toonaard en dat we vier harmonische reine kwinten omhoog en vier harmonische kwinten omlaag gaan. Voor de frequentie van de lage C wordt in hoofdstuk 3 voorlopig aangenomen dat deze 1 Hz is en dat de frequentie van de hoge C dus 2 Hz is. Als de verhoudingen van alle twaalf tonen bekend zijn wordt in hoofdstuk 4, de frequentie van de C zodanig gekozen dat de frequentie van de A onder de lage C, 440 Hz is. Als men vanuit C vier keer een harmonische reine kwint omhoog gaat dan vindt men de tonen G, D, A en E. Als men vanuit C vier keer een harmonische reine kwint omlaag gaat dan vindt men de tonen F, Bes, Es en As (voor de zwartetoetstonen worden alleen de namen met een es-uitgang gebruikt). Deze stemming is dus hetzelfde als wanneer men vanuit A één maal een harmonische reine kwint omhoog en zeven maal een harmonische kwint omlaag gaat!

Voor de harmonische stemming geldt dat de frequentie van een hogere harmonische evenredig is met het rangnummer van de betreffende harmonische. Het interval tussen de grondtoon (ofte wel de 1e harmonische) en de 2e harmonische is een rein octaaf en de verhouding tussen de hoogste en de laagste toon van een rein octaaf is dus $2/1 = 2$.

Het interval tussen de 2^e en de 3^e harmonische is een reine kwint en de verhouding tussen de hoogste en de laagste toon van een harmonische reine kwint is dus 3/2 = 1,5. Het interval tussen de 3^e en de 4^e harmonische is een reine kwart en de verhouding tussen de hoogste en de laagste toon van een harmonische reine kwart is dus 4/3 = 1,33333. Het interval tussen de 4^e en de 5^e harmonische is een grote terts en de verhouding tussen de hoogste en de laagste toon van een harmonische grote terts is dus 5/4 = 1,25. Het interval tussen de 5^e en de 6^e harmonische is een kleine terts en de verhouding tussen de hoogste en de laagste toon van een harmonische kleine terts is dus 6/5 = 1,2.

3 Berekening van de frequentieverhoudingen

We berekenen nu de frequenties van de chromatische tonen tussen de lage C en de hoge C. Voorlopig wordt aangenomen dat de frequentie van de lage C, 1 Hz is.

Voor de G boven de lage C geldt nu een frequentie van 1 * 3/2 = 3/2 Hz. Voor de D daarboven geldt nu een frequentie van 3/2 * 3/2 = 9/4 Hz. Deze D ligt echter boven de hoge C. De D één octaaf lager heeft een frequentie die de helft is en voor deze D geldt daarom een frequentie van 9/8 Hz. Voor de A daarboven geldt nu een frequentie van 3/2 * 9/8 = 27/16 Hz. De frequentie van de A onder de lage C is de helft en dus 27/32 Hz. Voor de E daarboven geldt nu een frequentie van 3/2 * 27/32 = 81/64 Hz.

Voor de frequentie van de F wordt uitgegaan van de hoge C. Voor de F daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 2 = 4/3 Hz. Voor de Bes daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 2/3 * 2 = 8/9 Hz. Deze Bes ligt echter onder de lage C. De Bes één octaaf hoger heeft een frequentie die het dubbele is en voor deze Bes geldt daarom een frequentie van 16/9 Hz. Voor de Es daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 16/9 = 32/27 Hz. Voor de As daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 32/27 = 64/81. Deze As ligt echter onder de lage C. De frequentie van de As één octaaf hoger is het dubbele en dus 128/81 Hz.

De drie tonen waarvoor de frequenties nog ontbreken zijn de Des, de Ges en de B. Deze drie tonen liggen ongeveer in het midden van de drie grote secundes tussen de C en de D, de F en de G en de Bes en de C.
Voor de grote secunde tussen de C en de D geldt een verhouding van 9/8 / 1 = 9/8.
Voor de grote secunde tussen de F en de G geldt een verhouding van 3/2 / 4/3 = 9/8.
Voor de grote secunde tussen de Bes en de C geldt een verhouding van 2 / 16/9 = 9/8.

Alle drie de grote secundes hebben dus een verhouding 9/8. Stel nu dat deze grote secunde zodanig verdeeld wordt in twee kleine secundes dat de verhouding voor de frequenties voor deze kleine secundes gelijk is. Dit is het geval wanneer verhouding tussen de hoogste en de laagste toon van deze kleine secunde $9/8^{1/2}$ is. Getallen waarin machten voorkomen die geen hele getallen zijn, kunnen gemakkelijk op een rekenmachine berekend worden met behulp van de toets x^y.

Voor de Des geldt een frequentie van 1 * $9/8^{1/2}$ = $9/8^{1/2}$ Hz. Voor de Des boven de hoge C geldt een frequentie van 2 * $9/8^{1/2}$ Hz. Voor de Ges geldt een frequentie van 4/3 * $9/8^{1/2}$ Hz. Voor de B geldt een frequentie van 16/9 * $9/8^{1/2}$ Hz. Voor de B onder de lage C geldt een frequentie van 8/9 * $9/8^{1/2}$ Hz. De gevonden frequenties werden in tabel 1 gezet. Deze tabel loopt van de As onder de lage C tot de D boven de hoge C. Onderaan tabel 1 werd een rij toegevoegd waarin de verhouding staat voor de betreffende toon met de toon één kleine secunde lager.

As	A	Bes	B	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C	Des	D
64/81	27/32	8/9	8/9 * $9/8^{1/2}$	1	$9/8^{1/2}$	9/8	32/27	81/64	4/3	4/3 * $9/8^{1/2}$	3/2	128/81	27/16	16/9	16/9* $9/8^{1/2}$	2	2 * $9/8^{1/2}$	9/4
					$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	256/243	2187/2048	256/243	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	256/243	2187/2048	256/243	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$		

Tabel 1 Frequenties voor C = 1 Hz voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten

In de onderste rij van tabel 1 is te zien dat we drie verschillende kleine secundes krijgen namelijk 256/243 = 1,05350 (vier maal), $9/8^{1/2}$ = 1,06066 (zes maal) en 2187/2048 = 1,06787 (twee maal). Een gelijkzwevende kleine secunde is $2^{1/12}$ = 1,05946. De factor van de kleinste kleine secunde met de gelijkzwevende kleine secunde is dus 1,05350 / 1,05946 = 0,99437. De factor van de grootste kleine secunde met de gelijkzwevende kleine secunde is dus 1,06787 / 1,05946 = 1,00794. De grootse en de kleinste kleine secunde wijken dus behoorlijk af van de gelijkzwevende kleine secunde.

Met behulp van tabel 1 is het nu mogelijk om voor elke toonaard te bepalen wat de verhouding voor elk interval is. Belangrijk is dat de reine kwarten en de reine kwinten zuiver harmonisch zijn. Voor de reine kwart zou een verhouding van 4/3 moeten gelden en voor de reine kwint zou een verhouding van 3/2 moeten gelden. Voor elke toonaard worden nu de verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint berekend. Het resultaat staat in tabel 2.

	reine kwart		reine kwint	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - F	4/3 / 1 = 4/3 = 1,33333	C - G	3/2 / 1 = 3/2 = 1,5
Des	Des - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 9/8^{1/2} = 4/3$	Des - As	$128/81 / 9/8^{1/2}$ = 1,48987
D	D - G	3/2 / 9/8 = 4/3	D - A	27/16 / 9/8 = 3/2
Es	Es - As	128/81 / 32/27 = 4/3	Es - Bes	16/9 / 32/27 = 3/2
E	E - A	27/16 / 81/64 = 4/3	E - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / 81/64$ = 1,48987
F	F - Bes	16/9 / 4/3 = 4/3	F - C	2 / 4/3 = 3/2
Ges	Ges - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 4/3$	Ges - Des	$2 * 9/8^{1/2} / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 3/2$
G	G - C	2 / 3/2 = 4/3	G - D	9/4 / 3/2 = 3/2
As	As - Des	$2 * 9/8^{1/2} / 128/81$ = 1,34240	As - Es	32/27 / 64/81 = 3/2
A	A - D	9/8 / 27/32 = 4/3	A - E	81/64 / 27/32 = 3/2
Bes	Bes - Es	32/27 / 8/9 = 4/3	Bes - F	4/3 / 8/9 = 3/2
B	B - E	$81/64 / (8/9 * 9/8^{1/2})$ = 1,34240	B - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 3/2$

Tabel 2 Verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint als functie van de toonaard voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten

Er blijken 10 toonaarden te zijn waarvoor de reine kwarten een verhouding 4/3 = 1,33333 en de reine kwinten een verhouding 3/2 = 1,5 hebben. De twee afwijkende toonaarden voor de reine kwarten zijn As en B en daarvoor is de verhouding voor beiden 1,34240 en dus wat groter dan 1,33333. De twee afwijkende toonaarden voor de reine kwinten zijn Des en E en daarvoor is de verhouding voor beiden 1,48987 en dus wat kleiner dan 1,5.

In tabel 2 is te zien dat, hoewel er acht reine kwinten harmonisch gestemd worden, er uiteindelijk tien reine kwinten harmonisch blijken te zijn. Er ontstaan dus nog twee extra reine kwinten. Dit kan als volgt verklaard worden. Omdat alle octaven harmonisch gestemd worden, ontstaat er voor elke gestemde harmonische reine kwint, een harmonische reine kwart. Bij de reine kwint C – G hoort zo de reine kwart G – C. Voor de acht gestemde harmonisch reine kwinten ontstaan dus acht bijbehorende harmonische reine kwarten. Het blijkt dat twee van deze acht harmonische reine kwarten aan weerskanten een kleine secunde met een verhouding $9/8^{1/2}$ hebben. Dit zijn de reine kwarten G – C en C – F. Wanneer we de som nemen van een reine kwart plus de twee aanliggende kleine secundes krijgen we de twee extra reine kwinten Ges – Des en B – Ges, immers $9/8^{1/2} * 4/3 * 9/8^{1/2} = 3/2$. Via een vergelijkbare redenering kan afgeleid worden dat we ook twee extra reine kwarten krijgen.

In tabel 2 is te zien dat voor de zeven toonaarden Es (3 mollen), Bes (2 mollen), F (1 mol), C (geen voortekens), G (1 kruis), D (2 kruizen) en A (3 kruizen) de reine kwarten en reine kwinten gelijktijdig harmonisch zijn. Er is nog één extra toonaard, namelijk Ges (6 mollen), waar dit ook het geval voor is. Voor de overige vier toonaarden Des, E, As en B wijken of de reine kwinten of de reine kwarten aanzienlijk af van de ideale verhoudingen en deze vier toonaarden zijn daarom waarschijnlijk niet bruikbaar.

Voor “de harmonische stemming”, zoals die in het begin van de notitie “Harmonisch intoneren” behandeld wordt, vonden we vijf verschillende kleine secundes met een verhouding 16/15, 17/16, 18/17, 19/18 en 20/19.

Voor de kleinste kleine secunde 20/19 = 1,05263 krijgen we een factor 1,05263 / 1,05946 = 0,99355. Deze factor wijkt dus nog meer van 1 af dan voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten. Voor de grootse kleine secunde 16/15 = 1,06667 krijgen we een factor 1,06667 / 1,05946 = 1,00681. Deze factor wijkt dus wat minder van 1 af dan voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten. Wat betreft de variatie in de kleine secundes zijn beide stemmingen dus met elkaar vergelijkbaar en ongeveer even slecht. De normale harmonische stemming is echter alleen bruikbaar voor de toonaard A terwijl de harmonische stemming voor klavierinstrumenten acht bruikbare toonaarden heeft. Mijn voorkeur gaat daarom uit naar deze laatste stemming als ik prijs zou stellen op een harmonische stemming met zo veel mogelijk bruikbare toonaarden rond de C.

Op dezelfde manier als in tabel 2 de verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint bepaald zijn, werden nu ook de verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts bepaald. Voor de kleine terts zou een verhouding 6/5 moeten gelden en voor de grote terts zou een verhouding 5/4 moeten gelden. Voor elke toonaard worden nu de verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts berekend. Het resultaat staat in tabel 3.

	kleine terts		grote terts	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - Es	32/27 / 1 = 32/27 = 1,18519	C - E	81/64 / 1 = 81/64 = 1,26563
Des	Des - E	$81/64 / 9/8^{1/2}$ = 1,19324	Des - F	$4/3 / 9/8^{1/2}$ = 1,25708
D	D - F	4/3 / 9/8 = 32/27 = 1,18519	D - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 9/8$ = 1,25708
Es	Es - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 32/27$ = 1,19324	Es - G	3/2 / 32/27 = 81/64 = 1,26563
E	E - G	3/2 / 81/64 = 32/27 = 1,18519	E - As	128/81 / 81/64 = 8192/6561 = 1,24859
F	F - As	128/81 / 4/3 = 32/27 = 1,18519	F - A	27/16 / 4/3 = 81/64 = 1,26563
Ges	Ges - A	$27/16 / (4/3 * 9/8^{1/2})$ = 1,19324	Ges - Bes	$16/9 / (4/3 * 9/8^{1/2})$ = 1,25708
G	G - Bes	16/9 / 3/2 = 32/27 = 1,18519	G - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / 3/2$ = 1,25708
As	As - B	$8/9 * 9/8^{1/2} / 64/81$ = 1,19324	As - C	1 / 64/81 = 81/64 = 1,26563
A	A - C	1 / 27/32 = 32/27 = 1,18519	A - Des	$9/8^{1/2} / 27/32$ = 1,25708
Bes	Bes - Des	$9/8^{1/2} / 8/9$ = 1,19324	Bes - D	9/8 / 8/9 = 81/64 = 1,26563
B	B - D	$9/8 / (8/9 * 9/8^{1/2})$ = 1,19324	B - Es	$32/27 / (8/9 * 9/8^{1/2})$ = 1,25708

Tabel 3 Verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts als functie van de toonaard voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten

Geen van de berekende verhoudingen voor de kleine terts komt overeen met de verhouding 6/5 = 1,2. De verhouding 32/27 = 1,18519 komt zes maal voor en is aanzienlijk te klein. De verhouding 1,19324 komt ook zes maal voor en is enigszins te klein.

Geen van de berekende verhoudingen voor de grote terts komt overeen met de verhouding 5/4 = 1,25. De verhouding 81/64 = 1,26563 komt vijf maal voor en is aanzienlijk te groot. De verhouding 1,25708 komt zes maal voor en is behoorlijk te groot. De verhouding 8192/6561 = 1,24859 komt één maal voor en is enigszins te klein.

De grote en de kleine tertsen zijn dus niet zuiver harmonisch maar dat was ook niet het uitgangspunt voor deze harmonische stemming voor klavierinstrumenten. Gelijkzwevende kleine tertsen zijn aanzienlijk kleiner dan harmonische kleine tertsen. Gelijkzwevende grote tertsen zijn aanzienlijk groter dan harmonische grote tertsen. Voor deze harmonische stemming voor klavierinstrumenten zitten de kleine en de grote tertsen dus dichter tegen de gelijkzwevende stemming aan en met de gelijkzwevende stemming valt ook mee te leven. Of er al dan niet een zweving optreedt tussen hogere harmonischen van tertsen is toch lastig waar te nemen omdat de gemeenschappelijke hogere harmonischen al een tamelijk hoog rangnummer hebben. Daarom lijkt het mij niet erg bezwaarlijk dat de tertsen niet zuiver harmonisch zijn.

Stel nu dat men deze stemming vroeger ook al gebruikte. De vraag blijft wel hoe men vroeger de drie tonen Des, Ges en B stemde als men geen apparatuur had waarmee de frequentie nauwkeurig gemeten kon worden. Waarschijnlijk is het nog niet zo lastig om een grote secunde zodanig op het gehoor in tweeën te verdelen dat de verhouding van beide kleine secundes gelijk is.

4 Berekening van de frequenties in Hz

Wat nu nog ontbreekt, is de berekening van de frequenties van de chromatische tonen wanneer aangenomen wordt dat de frequentie van de A onder de lage C, 440 Hz is. De verhouding tussen de frequentie van de lage C en de A onder de lage C is 1 / 27/32 = 32/27 = 1,18519. Als de A een frequentie van 440 Hz heeft dan heeft de lage C dus een frequentie van 1,18519 * 440 = 521,48148 Hz. De harmonische frequenties f_{harm} van de overige elf chromatische tonen worden dan gevonden door de verhoudingen uit tabel 1 te vermenigvuldigen met een factor 521,48148. De gelijkzwevende frequenties f_{gelijk} worden ook gegeven in tabel 4. De waardes werden afgerond op twee decimalen achter de komma.

	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C
f_{harm} (Hz)	521,48	553,11	586,67	618,05	660,00	695,31	737,49	782,22	824,07	880,00	927,08	983,31	1042,96
f_{gelijk}(Hz)	521,48	552,49	585,34	620,15	657,03	696,09	737,49	781,34	827,80	877,02	929,17	984,43	1042,96
Afw (%)	0	- 0,11	- 0,23	+ 0,34	- 0,45	+ 0,11	0	- 0,11	+ 0,45	- 0,34	+ 0,23	+ 0,11	0
Afw (c)	0	- 1,9	- 3,9	+ 5,7	- 7,6	+ 1,9	0	- 1.9	+ 7,6	- 5,7	+ 3,9	+ 1,9	0

Tabel 4 Frequentie voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van C

De procentuele afwijking wordt gegeven door de formule:

$$\text{Afwijking} = 100\,(f_{vals} - f_{zuiver}) / f_{zuiver} \quad (\%) \qquad (1)$$

Welke frequentie nu voor f_{vals} en welke voor f_{zuiver} ingevuld moet worden als men de harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming met elkaar wil vergelijken, hangt af van welke stemming men zuiver noemt. In deze notitie wordt de harmonische stemming zuiver genoemd en formule 1 verandert daardoor in:

$$\text{Afwijking} = 100\,(f_{gelijk} - f_{harm}) / f_{harm} \quad (\%) \qquad (2)$$

De berekende afwijking in procenten (Afw (%)) wordt vermeld in de vierde rij van tabel 4.

De procentuele afwijking tussen twee gelijkzwevende tonen die een kleine secunde van elkaar verschillen is ongeveer 5,946 %. Een procentuele afwijking van 0,1 % is dus ongeveer 1/60 van een halve toonafstand. De absolute waardes van de afwijkingen blijken symmetrisch verdeeld zijn t. o. v. de Ges en t. o. v. de C. De grootste afwijkingen zitten in de E en de As. De afwijking kan ook in cent worden gegeven. Hierbij geldt dat een rein octaaf 1200 cent is. Dit betekent dat een gelijkzwevende kleine secunde 100 cent is. Daardoor geldt:

$$5{,}946\ \% = 100 \text{ cent ofte wel } 1\ \% = 16{,}82 \text{ cent} \qquad (3)$$

De berekende afwijking in cent (Afw (c)) wordt gegeven in de vijfde rij van tabel 4.

Theoretisch is het ook nog mogelijk om vanuit C, vijf harmonische reine kwinten omhoog en omlaag te stemmen maar dan wijken de frequenties van de Des en de B toch wel erg ver af van de frequenties volgens de gelijkzwevende stemming en dat lijkt me niet meer toelaatbaar. Daarom vind ik dat je niet verder moet gaan dan vanuit C vier harmonische reine kwinten omhoog en omlaag.

Ik denk dat deze stemming of iets wat erop lijkt in het verleden gebruikt is om klavierinstrumenten te stemmen. Uiteindelijk vind ik de gelijkzwevende stemming nog steeds het beste omdat daarmee in alle twaalf toonaarden te spelen is zonder dat er echt hinderlijke onzuiverheden optreden.

Hoewel in tabel 2 en 3 de afwijkingen voor de reine kwint, de reine kwart, de grote terts en de kleine terts als functie van de toonaard al gegeven worden, lijkt het handig om te weten hoe groot de afwijking voor elke individuele toon is, voor elke gebruikelijke toonaard.

De frequenties voor alle chromatische tonen van de lage C tot de hoge C, zijn gelijk aan de verhoudingen uit de tweede rij van tabel 1. Aangenomen wordt dat de lage C, 1 Hz is. De majeurtoonladder van C wordt gevonden door de zwartetoetstonen weg te laten. De volgende procedure wordt gevolgd om de afwijkingen voor elke gangbare toonaard te vinden.

Als je vanuit de C een kwint omhoog gaat krijg je de G. Nu bouw je op de G een nieuwe majeurtoonladder op met dezelfde verhoudingen als die voor de toonaard C gelden en bereken je de frequenties van de tonen voor deze nieuwe toonaard. Deze procedure herhaal je nog vijf keer. Een probleem is dat de tabel erg breed wordt als je alleen maar omhoog gaat. Daarom spring je een octaaf omlaag als je de B of de C bereikt heb maar je moet de berekende frequentie dan wel halveren. Vervolgens ga je weer terug naar C en volg je dezelfde procedure maar nu ga je telkens een kwint omlaag. Voor elke toonaard vind je dat bepaalde frequenties afwijken van die van de majeurtoonladder van C. Het is een hoop rekenwerk en alleen het resultaat van de berekeningen werd in tabel 5 en 6 gezet. Omdat in deze procedure de kwintencirkel gebruikt werd, wordt nu wel onderscheid gemaakt tussen zwartetoetstonen met een is- of met een es-uitgang. Als een getal niet als breuk geschreven kan worden, dan wordt het op vijf decimalen afgerond. De valse tonen zijn rood gekleurd.

toon- aard	B 8/9 * $9/8^{1/2}$	C 1	Cis $9/8^{1/2}$	D 9/8	Dis 32/27	E 81/64	F 4/3	Fis 4/3 * $9/8^{1/2}$	G 3/2	Gis 128/81	A 27/16	Ais 16/9	B 16/9 * $9/8^{1/2}$	C 2
C (0#)	0,94281	1		9/8		81/64	4/3		3/2		27/16		1,88562	2
G (1#)	243/256	1		9/8		81/64		1,41421	3/2		27/16		243/128	2
D (2#)	243/256		1,06066	9/8		81/64		729/512	3/2		27/16		243/128	
A (3#)	243/256		2187/2048	9/8		81/64		729/512		1,59099	27/16		243/128	
E (4#)	243/256		2187/2048		1,19324	81/64		729/512		6561/4096	27/16		243/128	
B (5#)	0,94281		1,06066		1,19324	1,25708		1,41421		1,59099		16/9	1,88562	
Fis (6#)	0,94281		1,06066		1,19324		4/3	1,41421		1,59009		1,78986	1,88562	

Tabel 5 Berekende frequenties voor zes kruistoonaarden voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten bij gebruik van de kwintencirkel omhoog

In G is de valse toon de B. In D zijn de valse tonen de Fis en de B. In A zijn de valse tonen de Cis, de Fis, de Gis en de B. In E zijn de valse tonen de Cis, de Dis, de Fis, de Gis en de B. In B zijn de valse tonen de Dis, de E en de Gis. In Fis zijn de valse tonen de Dis en de Gis.

toon- aard	B 8/9 * $9/8^{1/2}$	C 1	Des $9/8^{1/2}$	D 9/8	Es 32/27	E 81/64	F 4/3	Ges 4/3 * $9/8^{1/2}$	G 3/2	As 128/81	A 27/16	Bes 16/9	B 16/9 * $9/8^{1/2}$	C 2
C (0*b*)	0,94281	1		9/8		81/64	4/3		3/2		27/16		1,88562	2
F (1*b*)		1		9/8		1,25708	4/3		3/2		27/16	16/9		2
Bes(2*b*)		1		9/8	32/27		4/3		3/2		1,67610	16/9		2
Es (3*b*)		1		1,11740	32/27		4/3		3/2	128/81		16/9		2
As (4*b*)		1	256/243		32/27		4/3		1,48987	128/81		16/9		2
Des(5*b*)		1	1,06066		1,19324		1,34240	1,41421		1,59099		1,78986		2
Ges(6*b*)	0,94281		1,06066		1,19324		4/3	1,41421		1,59099		1,78986	1,88562	

Tabel 6 Berekende frequenties voor zes moltoonaarden voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten bij gebruik van de kwintencirkel omlaag

In F is de valse toon de E. In Bes is de valse toon de A. In Es is de valse toon de D. In As zijn de valse tonen de Des en de G. In Des zijn de valse tonen de Es, de F, de As en de Bes. In Ges zijn de valse tonen de Es, de As en de Bes.

In beide tabellen staan dus heel wat rode tonen die dus vals zijn als de toon op een instrument aangeslagen wordt. De afwijking in procenten kan berekend worden met formule 1 maar het is niet direct duidelijk wat nu voor f_{vals} en wat voor f_{zuiver} ingevuld moet worden en in een eerdere versie van deze notitie heb ik dit verkeerd gedaan. De tonen die in tabel 5 en 6 voor de toonaard C gegeven worden zijn zuiver in die toonaard maar voor andere toonaarden zullen sommige van de aangeslagen tonen vals zijn. Van de voor de andere toonaarden berekende frequenties, zijn die tonen vals waarvoor de frequentie rood is.

Dit betekent echter niet dat de berekende rode frequentie onjuist is. De toon zou eigenlijk moeten klinken met de berekende rode frequentie en deze frequentie is dus f_{zuiver}. De frequentie die je werkelijk hoort als de toon aangeslagen wordt is de zwarte frequentie die voor deze toon gegeven wordt in de bovenste rij van de tabel en dit is dus f_{vals}. Tabel 5 wordt nu gekopieerd als tabel 7 en tabel 6 wordt gekopieerd als tabel 8. Voor elke toon wordt de afwijking berekend en de frequentie wordt vervangen door de afwijking in %.

toon- aard	B 0,94281	C 1	Cis 1,06066	D 9/8	Dis 32/27	E 81/64	F 4/3	Fis 1,41421	G 3/2	Gis 128/81	A 27/16	Ais 16/9	B 1,88562	C 2
C (0#)	0 %	0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		0 %		0 %	0 %
G (1#)	-0,68 %	0 %		0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		-0,68 %	0 %
D (2#)	-0,68 %		0 %	0 %		0 %		-0,68 %	0 %		0 %		-0,68 %	
A (3#)	-0,68 %		-0,68 %	0 %		0 %		-0,68 %		-0,68 %	0 %		-0,68 %	
E (4#)	-0,68 %		-0,68 %		-0,68 %	0 %		-0,68 %		-1,35 %	0 %		-0,68 %	
B (5#)	0 %		0 %		-0,68 %	+0,68 %		0 %		-0,68 %		0 %	0 %	
Fis (6#)	0 %		0 %		-0,68 %		0 %	0 %		-0,68 %		-0,68 %	0 %	

Tabel 7 Berekende afwijking (%) voor zes kruistoonaarden voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten bij gebruik van de kwintencirkel omhoog

toon- aard	B 0,94281	C 1	Des 1,06066	D 9/8	Es 32/27	E 81/64	F 4/3	Ges 1,41421	G 3/2	As 128/81	A 27/16	Bes 16/9	B 1,88562	C 2
C (0*b*)	0 %	0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		0 %		0 %	0 %
F (1*b*)		0 %		0 %		+0,68%	0 %		0 %		0 %	0 %		0 %
Bes(2*b*)		0 %		0 %	0 %		0 %		0 %		+0,68 %	0 %		0 %
Es (3*b*)		0 %		+0,68 %	0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		0 %
As (4*b*)		0 %	+0,68%		0 %		0 %		+0,68%	0 %		0 %		0 %
Des(5*b*)		0 %	0 %		-0,68 %		-0,68 %	0 %		-0,68%		-0,68 %		0 %
Ges(6*b*)	0 %		0 %		-0,68 %		0 %	0 %		-0,68%		-0,68 %	0 %	

Tabel 8 Berekende afwijking (%) voor zes moltoonaarden voor de harmonische stemming voor klavierinstrumenten bij gebruik van de kwintencirkel omlaag

Deze harmonische stemming voor klavierinstrumenten lijkt wat betreft de wittetoetstonen erg op de klassieke reine stemming van Pythagoras. Het enige verschil is dat Pythagoras voor de B de verhouding 243/128 gebruikt terwijl ik daarvoor $16/9 * 9/8^{1/2}$ gebruik.

In tabel 7 en 8 is te zien dat nagenoeg alle afwijkingen of +0,68 % of -0,68 % zijn wat nog wel acceptabel lijkt aangezien een halve toonafstand ongeveer overeenkomt met 5,9 %. De enige uitzondering is de Gis in de toonaard E waarvoor de afwijking -1,35 % is en dus twee keer zo groot. Hoewel de reine kwarten en de reine kwinten alleen gelijktijdig harmonisch zijn voor de toonaarden Es, Bes, F, C, G, D, A en Ges, lijken de meeste overige toonaarden toch ook nog bruikbaar omdat de afwijkingen maar gering zijn. Een uitzondering vormt de toonaard E omdat de Gis die daarin voorkomt toch wel erg veel te laag is.

Als tabel 7 met tabel 8 vergeleken wordt is te zien dat er meer valse tonen in de kruistoonaarden voorkomen en dat de toon daar bijna altijd te laag is. Voor de moltoonaarden is er maar één toon vals in de toonaarden F, Bes en Es en deze tonen, de D, de E en de A, zijn alle drie te hoog. Voor de toonaarden Des en Ges zijn de valse tonen echter allemaal te laag. Ook is te zien dat er in één tabel geen tonen voorkomen die in de ene toonaard te hoog en in de andere toonaard te laag zijn wat bij “de harmonische stemming”, die in mijn notitie “Harmonisch moduleren” beschreven wordt, wel het geval is. Er zijn echter wel tonen die in de ene toonaard geen afwijking hebben en in de andere wel. Dit toont aan dat je ook voor deze stemming niet eenduidig aan de naam van de toon kunt zien of een toon verhoogd, verlaagd of niet gecorrigeerd moet worden. Dit zou relevant zijn voor instrumenten waarvoor de toonhoogte wel enigszins tijdens het spelen aangepast kan worden. Daardoor kun je niet alleen voor de gelijkzwevende stemming maar ook voor deze harmonische stemming voor klavierinstrumenten, de tonen net zo goed één naam geven zoals ik doe in mijn notitie “Een notenschrift zonder mollen en kruizen”, die op mijn website te vinden is.