Adriaan Kragten, Sint-Oedenrode 17-3-2018

De harmonische stemming

1 Inleiding

Op mijn niet commerciële website: www.kdwindturbines.nl staat onder het menu "No wind energy" de notitie "Harmonisch intoneren". In deze notitie van 23 pagina's wordt, wat ik noem, "de harmonische stemming" beschreven maar er worden ook zes alternatieve harmonische stemmingen beschreven.

Als een snaar aangeslagen wordt dan klinken er behalve de grondtoon ofte wel de 1^{e} harmonische ook gelijktijdig een hele reeks hogere harmonischen mee waarvan de frequenties evenredig zijn met het rangnummer van de betreffende hogere harmonische. Bij wat ik noem, "de harmonische stemming", werden alle chromatische tonen voor de toonaard A direct of indirect afgeleid van de 1^{e} t/m de 20^{e} hogere harmonischen. Deze stemming is in andere toonaarden dan A ontzettend vals en lijkt mij daardoor alleen bruikbaar voor zang of voor instrumenten die geen vaste tonen produceren, zoals strijkinstrumenten, omdat daarvoor ook alle andere tonen als grondtoon gekozen kunnen worden. Deze harmonische stemming wordt in deze aparte notitie verder toegelicht en er wordt voor elke toon in elke gebruikelijke toonaard berekend wat de afwijking is.

Bij de zes alternatieve harmonische stemmingen werden alleen de reine kwart en de reine kwint harmonisch gestemd. Voor het zesde alternatief werd de C als grondtoon genomen en dit 6^{e} alternatief lijkt het best toepasbaar voor klavierinstrumenten. Dit zesde alternatief werd al eerder verder toegelicht in een aparte notitie getiteld "De harmonische stemming voor klavierinstrumenten".

2 De harmonische stemming

In de notitie "Harmonisch intoneren" werd voor de harmonische stemming de A als grondtoon gekozen omdat de A de toon is waar de frequentie voor gedefinieerd wordt. Bij nader inzien lijkt het toch beter om de C als grondtoon te nemen. In eerste instantie wordt aangenomen dat de frequentie voor de lage C, 1 Hz is en voor de hoge C dus 2 Hz is. Wanneer de frequentieverhouding voor alle chromatische tonen bekend is zal in hoofdstuk 4 berekend worden wat de werkelijke frequenties zijn als de frequentie van de A onder de lage C, 440 Hz is.

Bij de harmonische stemming zijn de frequenties van de tonen afgeleid van de hogere harmonischen. Als een snaar trilt, produceert die niet alleen een grondtoon ofte wel eerste harmonische maar ook gelijktijdig nog een hele reeks hogere harmonischen. De frequentie f van deze hogere harmonische is evenredig met het rangnummer van de harmonische. Als de eerste harmonische een frequentie heeft van 1 Hz dan heeft de tweede harmonische een frequentie van 2 Hz, de derde harmonische een frequentie van 3 Hz, enz. Stel nu eens dat de eerste harmonische een C is met een frequentie van 1 Hz. Welke tonen kunnen dan afgeleid worden uit de eerste twintig hogere harmonischen?

Om de tonen goed van elkaar te kunnen onderscheiden geef ik eerst het rangnummer van de harmonische gevolgd door de naam van de toon en ik geef ook de bijbehorende frequentie. Ik gebruik voorlopig alleen de naam met een es-uitgang. Je krijgt dan het volgende rijtje:

1C, f = 1 Hz
2C, f = 2 Hz
3G, f = 3 Hz
4C, f = 4 Hz
5E, f = 5 Hz
6G, f = 6 Hz
(7Bes), f = 7 Hz
8C, f = 8 Hz
9D, f = 9 Hz
10E, f = 10 Hz
(11Ges), f = 11 Hz
12G, f = 12 Hz
(13As), f = 13 Hz
(14Bes), f = 14 Hz
15B, f = 15Hz
16C, f = 16 Hz
17Des, f = 17 Hz
18D, f = 18 Hz
19Es, f = 19 Hz
20E, f = 20 Hz

De 7Bes, de 11Ges en de 14Bes zijn aanmerkelijk te laag. De 13As is aanmerkelijk te hoog. Deze tonen worden daarom niet gebruikt en staan daarom tussen haakjes. Uit het bovenstaande lijstje kunnen een aantal tonen afgeleid worden die liggen tussen een C van 1 Hz en een C van 2 Hz. Hierbij geldt dat een toon dezelfde naam houdt als de frequentie gehalveerd wordt. Dit is in het lijstje duidelijk te zien aan de 16C, de 8C, de 4C, de 2C en de 1C en aan de 12G, de 6G en de 3G. In het volgende lijstje heb ik de tonen aangegeven die uit het eerste lijstje kunnen worden afgeleid en die lopen van een lage C van 1 Hz tot een hoge C van 2 Hz. De acht gegeven tonen zijn dus allemaal grondtonen met ieder zijn eigen reeks hogere harmonischen en zij hebben daarom geen rangnummer.

C, f = 16/16 = 1 Hz
Des, f = 17/16 = 1,0625 Hz
D, f = 18/16 = 9/8 = 1,125 Hz
Es, f = 19/16 = 1,1875 Hz
E, f = 20/16 = 5/4 = 1,25 Hz
G, f = 12/8 = 3/2 = 1,5 Hz
B, f = 15/8 = 1,875 Hz
C, f = 2 Hz

We vinden op deze manier dus de zes tonen Des, D, Es, E, G en B met de bijbehorende frequenties die liggen tussen de lage C van 1 Hz en de hoge C van 2 Hz.

De majeurtoonladder van C bestaat uit een opeenvolging van grote en kleine secundes. Een grote secunde wordt ook wel een hele afstand genoemd en een kleine secunde wordt ook wel een halve afstand genoemd. De majeurtonladder van C bestaat uit de tonen: C, D, E, F, G, A, B en C. De afstanden zijn heel, heel, half, heel, heel, heel, half. Deze afstanden gelden voor elke majeurtoonladder. De C is de 1^{e} trap, de D is de 2^{e} trap, de E is de 3^{e} trap, enz. Van de majeurtoonladder van C ontbreken nu nog de tonen F en A.

De chromatische toonladder van C bestaat uit een opeenvolging van kleine secundes en heeft als tonen C, Des, D, Es, E, F, Ges, G, As, A, Bes, B, C. Van de chromatische toonladder van C ontbreken nu nog de tonen F, Ges, As, A en Bes.

Uit de verhouding tussen de hogere harmonischen kan direct de frequentieverhouding van sommige intervallen worden afgeleid. Er gelden dan de volgende verhoudingen:

Rein octaaf = 2/1 = 2
Reine kwint = 3/2 = 1,5
Reine kwart = 4/3 = 1,33333
Grote terts = 5/4 = 1,25
Kleine terts = 6/5 = 1,2

Omdat voor de reine kwart een verhouding 4/3 geldt, kan de frequentie van de F direct bepaald worden als f = 1 * 4/3 = 1,33333 Hz.

Er zijn twee verschillende grote secundes namelijk de grote grote secunde die tussen de 9^e^ en de 8^e^ harmonische ligt en waarvoor de verhouding 9/8 = 1,125 is en de kleine grote secunde die tussen de 10^e^ en de 9^e^ harmonische ligt en waarvoor de verhouding 10/9 = 1,11111 is. Tussen de reine kwart en de reine kwint zit ook een grote secunde. Stel dat deze een verhouding X heeft. Er geldt dan dat 4/3 * X = 3/2. Dit geeft dat X = 3/2 * 3/4 = 9/8. Dit interval is dus ook een grote grote secunde.

Tussen de grote septiem en het reine octaaf zit een kleine secunde. Omdat deze tonen afgeleid zijn van de 15^e^ en de 16^e^ harmonische geldt dat de verhouding 16/15 is. Tussen de grote terts en de reine kwart zit ook een kleine secunde. Stel dat deze een verhouding Y heeft. Er geldt dan dat 5/4 * Y = 4/3. Dit geeft dat Y = 4/3 * 4/5 = 16/15. Deze verhouding is dus gelijk aan die tussen de grote septiem en het reine octaaf.

De tonen C, Des, D, Es en E zijn afgeleid van de 16^e^, de 17^e^, de 18^e^, de 19^e^ en de 20^e^ harmonische. Tussen al deze tonen zit een kleine secunde maar elke secunde heeft een andere verhouding. De verhouding Des / C = 17/16. De verhouding D / Des is 18/17. De verhouding Es / D = 19/18. De verhouding E / Es = 20/19. We hadden al een kleine secunde met een verhouding 16/15 en er zijn dus vijf verschillende kleine secundes.

We gaan nu weer even terug naar de majeurtoonladder van C. Die bestaat uit een eerste deel met de tonen C, D, E en F. Het interval tussen de C en de F is een reine kwart en de afstand tussen de tonen is heel, heel, half. Hiervan heeft de eerste hele afstand een verhouding 9/8, de tweede hele afstand een verhouding 10/9 en de daar op volgende halve afstand een verhouding 16/15. Het tweede deel van de majeurtoonladder van A bestaat uit de tonen G, A, B en C. Het interval tussen de G en de C is ook een reine kwart. De afstand tussen de tonen is ook heel, heel, half.

Het eerste deel van de chromatische toonladder van C bestaat uit de tonen C, Des, D, Es, E en F. Het tweede deel van de chromatische toonladder van A bestaat uit de tonen G, As, A, Bes, B en C waarvan de As, de A en de Bes nog ontbreken. De frequenties van de As, de A en de Bes worden nu zodanig gekozen dat voor de tonen van het tweede deel van de chromatische toonladder van C precies dezelfde verhoudingen gelden als voor het eerste deel.
Dit geeft voor de frequentie van de As dat f = 3/2 * 17/16 = 51/32 = 1,59375 Hz. Dit geeft voor de frequentie van de A dat f = 3/2 * 9/8 = 27/16 = 1,6875 Hz. Dit geeft voor de frequentie van de Bes dat f = 3/2 * 19/16 = 57/32 = 1,78125 Hz.

Wat nu nog ontbreekt, is de Ges. Er was al eerder bepaald dat tussen de F en de G een grote grote secunde ligt. Deze grote grote secunde wordt nu op dezelfde manier in twee kleine secundes verdeeld als de grote grote secunde tussen de C en de D. Dit geeft voor de frequentie van de Ges dat f = 4/3 * 17/16 = 17/12 = 1,41667 Hz.

Ik vind op deze manier voor de overmatige kwart een verhouding 17/12 = 1,41667, voor de kleine sext een verhouding 51/32 = 1,59375, voor de grote sext een verhouding 27/16 = 1,6875, voor de kleine septiem een verhouding 57/32 = 1,78125 en voor de grote septiem een verhouding 15/8 = 1,875.

Er bestaan een groot aantal verschillende reine of harmonische stemmingen maar deze chromatische versie, waarvoor zeven tonen direct en vijf tonen indirect uit de reeks van hogere harmonischen werden afgeleid, wordt nu “de harmonische stemming” genoemd.

De gevonden frequenties voor de harmonische stemming f_{harm} voor de tonen uit de chromatische toonladder van C worden nu in tabel 1 gezet. Ter vergelijking worden ook de frequenties volgens de gelijkzwevende stemming f_{gelijk} (of beter de evenredig zwevende stemming) gegeven.

Voor de gelijkzwevende stemming geldt een vaste verhouding tussen tonen die een kleine secunde uit elkaar liggen van $2^{1/12}$ = 1,05946. Op elke rekenmachine kunnen deze machten snel berekend worden door de toets x^y te gebruiken. Om de macht te vinden waartoe 2 verheven moet worden voor een bepaald interval telt men het aantal kleine secundes van dat interval. Voor een reine kwint is de verhouding $2^{7/12}$ = 1,49831. Een gelijkzwevende reine kwint is dus een heel klein beetje kleiner dan een harmonische reine kwint waarvoor de verhouding 1,5 is. Voor een reine kwart is de verhouding $2^{5/12}$ = 1,33485. Een gelijkzwevende reine kwart is dus een heel klein beetje groter dan een harmonische reine kwart waarvoor de verhouding 1,33333 is. Voor een grote terts is de verhouding $2^{4/12}$ = 1,25992. Een gelijkzwevende grote terts is dus aanmerkelijk groter dan een harmonische grote terts waarvoor de verhouding 1,25 is. Voor een kleine terts is de verhouding $2^{3/12}$ = 1,18921. Een gelijkzwevende kleine terts is dus aanmerkelijk kleiner dan een harmonische kleine terts waarvoor de verhouding 1,2 is. Het grootste verschil tussen de harmonische en de gelijkzwevende stemming zit daarom in de tertsen en niet in de kwarten of kwinten.

	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C
f_{harm} (Hz)	1	17/16 = 1,0625	9/8 = 1,125	19/16 = 1,1875	5/4 = 1,25	4/3 = 1,33333	17/12 = 1,41667	3/2 = 1,5	51/32 = 1,59375	27/16 = 1,6875	57/32 = 1,78125	15/8 = 1,875	2
f_{gelijk}(Hz)	1	1,05946	1,12246	1,18921	1,25992	1,33484	1,41421	1,49831	1,58740	1,68179	1,78180	1,88775	2
onderlinge verhouding		17/16 = 1,0625	18/17 = 1,05882	19/18 = 1,05556	20/19 = 1,05263	16/15 = 1,06667	17/16 = 1,0625	18/17 = 1,05882	17/16 = 1,0625	18/17 = 1,05882	19/18 = 1,05556	20/19 = 1,05263	16/15 = 1,06667

Tabel 1 Frequenties voor de harmonische en de gelijkzwevende stemming voor C = 1 Hz

Bij deze afleiding vinden we voor de harmonische stemming voor elke chromatische toon een eenduidige frequentie. Voor de wittetoetstonen zijn de verhoudingen gelijk aan die van de klassieke stemming volgens Aristoxenos. Aan tabel 1 werd onderaan nog een rij toegevoegd waarin voor de harmonische stemming, de onderlinge verhouding van de betreffende toon staat met de toon die een kleine secunde lager ligt. Voor de gelijkzwevende stemming zijn al deze onderlinge verhoudingen gelijk en groot $2^{1/12}$ = 1,05946. De verhouding 18/17 ligt het dichtst bij die voor de gelijkzwevende stemming.

3 Bepaling van de belangrijkste intervallen

Met behulp van tabel 1 is het nu mogelijk om voor elke toonaard te bepalen wat de verhouding voor elk interval is. Belangrijk is dat de reine kwarten en de reine kwinten zuiver harmonisch zijn. Voor de reine kwart zou een verhouding van 4/3 moeten gelden en voor de reine kwint zou een verhouding van 3/2 moeten gelden. Voor elke toonaard worden nu de verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint berekend. Het resultaat staat in tabel 2.

	reine kwart		reine kwint	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - F	4/3 / 1 = 4/3 = 1,33333	C - G	3/2 / 1 = 3/2 = 1,5
Des	Des - Ges	17/12 / 17/16 = 4/3 = 1,33333	Des - As	51/32 / 17/16 = 3/2 = 1,5
D	D - G	3/2 / 9/8 = 4/3 = 1,33333	D - A	27/16 / 9/8 = 3/2 = 1,5
Es	Es - As	51/32 / 19/16 = 51/38 = 1,34211	Es - Bes	57/32 / 19/16 = 3/2 = 1,5
E	E - A	27/16 / 5/4 = 27/20 = 1,35	E - B	15/8 / 5/4 = 3/2 = 1,5
F	F - Bes	57/32 / 4/3 = 171/128 = 1,33594	F - C	2 / 4/3 = 3/2= 1,5
Ges	Ges - B	15/8 / 17/12 = 45/34 = 1,32353	Ges - Des	17/8 / 17/12 = 3/2 = 1,5
G	G - C	2 / 3/2 = 4/3= 1,33333	G - D	9/4 / 3/2 = 3/2 = 1,5
As	As - Des	17/8 / 51/32 = 4/3= 1,33333	As - Es	19/8 / 51/32 = 76/51 = 1,49020
A	A - D	9/4 / 27/16 = 4/3 = 1,33333	A - E	5/2 / 27/16 = 40/27 = 1,48148
Bes	Bes - Es	19/8 / 57/32 = 4/3 = 1,33333	Bes - F	8/3 / 57/32 = 256/171 = 1,49708
B	B - E	5/2 / 15/8 = 4/3 = 1,33333	B - Ges	17/6 / 15/8 = 68/45 = 1,51111

Tabel 2 Verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint als functie van de toonaard voor de harmonische stemming

Er blijken 8 toonaarden te zijn waarvoor de reine kwarten een verhouding 4/3 = 1,33333 en de reine kwinten een verhouding 3/2 = 1,5 hebben. De vier afwijkende toonaarden voor de reine kwarten zijn Es, E, F en Ges en de verhoudingen zijn alle vier verschillend. De vier afwijkende toonaarden voor de reine kwinten zijn As, A, Bes en B en de verhoudingen zijn ook alle vier verschillend. Er zijn vier toonaarden waarvoor de verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint gelijktijdig harmonisch zijn. Dit zijn de toonaarden C, Des, D en G.

Wanneer twee gelijktijdig klinkende tonen gemeenschappelijke hogere harmonischen hebben die exact aan elkaar gelijk zijn dan hoort men geen zweving. Dit wordt door het menselijk oor als zuiver ervaren. Maar als er een gering verschil is tussen beide frequenties dan hoort men een zweving waarvan de frequentie gelijk is aan het verschil van de frequenties van de hogere harmonischen. Een zweving wordt over het algemeen als onzuiver ervaren maar er zijn ook instrumenten, zoals een honky-tonk-piano, waarbij bewust een zweving gecreëerd wordt om een soort van vibrato te suggereren. Een zweving tussen hogere harmonischen van twee verschillende gelijktijdig klinkende tonen is des te beter waarneembaar naarmate beide tonen een lagere bijna gemeenschappelijk hogere harmonische hebben. Des te lager de hogere harmonische, des te meer energie zit er in de trilling van die harmonische t. o. v. de energie die in de grondtoon zit en des te beter is de zweving boven de klank van beide tonen uit waarneembaar. Het waarnemen van een zweving hangt ook af van de frequentie van de zweving. Voor hoge tonen wordt de frequentie van de zweving zo hoog dat de zweving niet meer als zweving wordt waargenomen.

Een onzuiverheid in de reine kwint is zeer goed te horen omdat er een zweving optreedt tussen de 3^e harmonische van de laagste toon en de 2^e harmonische van de hoogste toon. Een onzuiverheid in de reine kwart is ook nog goed te horen omdat er een zweving optreedt tussen de 4^e harmonische van de laagste toon en de 3^e harmonische van de hoogste toon. Voor een onzuivere grote terts is er een zweving tussen de 5^e harmonische van de laagste toon en de 4^e harmonische van de hoogste toon. Voor een onzuivere kleine terts is er een zweving tussen de 6^e harmonische van de laagste toon en de 5^e harmonische van de hoogste toon. Zwevingen tussen tertsen zijn alleen nog maar waarneembaar voor mensen met een getraind gehoor en alleen maar als de betreffende tonen niet al te hoog zijn.

Voor de stemming die in de notitie “De harmonische stemming voor klavierinstrumenten” beschreven wordt, vinden we dat voor acht toonaarden Es, Bes, F, C, G, D, A en Ges, de reine kwart en de reine kwint beiden gelijktijdig zuiver harmonisch zijn. Mijn voorkeur gaat daarom uit naar deze laatste stemming als ik prijs zou stellen op een harmonische stemming met zo veel mogelijk bruikbare toonaarden rond de C.

Met behulp van tabel 1 werden nu voor elke toonaard de verhoudingen voor de kleine en de grote terts bepaald. Voor de kleine terts zou een verhouding 6/5 moeten gelden en voor de grote terts zou een verhouding 5/4 moeten gelden. Het resultaat staat in tabel 3.

	kleine terts		grote terts	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - Es	19/16 / 1 = 19/16 = 1,1875	C - E	5/4 / 1 = 5/4 = 1,25
Des	Des - E	5/4 / 17/16 = 20/17 = 1,17647	Des - F	4/3 / 17/16 = 64/51 = 1,25490
D	D - F	4/3 / 9/8 = 32/27 = 1,18519	D - Ges	17/12 / 9/8 = 34/27 = 1,25926
Es	Es - Ges	17/12 / 19/16 = 68/57 = 1,19298	Es - G	3/2 / 19/16 = 24/19 = 1,26316
E	E - G	3/2 / 5/4 = 6/5 = 1,2	E - As	51/32 / 5/4 = 51/40 = 1,275
F	F - As	51/32 / 4/3 = 153/128 = 1,19531	F - A	27/16 / 4/3 = 81/64 = 1,26563
Ges	Ges - A	27/16 / 17/12 = 81/68 = 1,19118	Ges - Bes	57/32 / 17/12 = 171/136 = 1,25735
G	G - Bes	57/32 / 3/2 = 19/16 = 1,1875	G - B	15/8 / 3/2 = 5/4 = 1,25
As	As - B	15/8 / 51/32 = 20/17 = 1,17647	As - C	2 / 51/32 = 64/51 = 1,25490
A	A - C	2 / 27/16 = 32/27 = 1,18519	A - Des	17/8 / 27/16 = 34/27 = 1,25926
Bes	Bes - Des	17/8 / 57/32 = 68/57 = 1,19298	Bes - D	9/4 / 57/32 = 24/19 = 1,26316
B	B - D	9/4 / 15/8 = 6/5 = 1,2	B - Es	19/8 / 15/8 = 19/15 = 1,26667

Tabel 3 Verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts als functie van de toonaard voor de harmonische stemming

Alleen voor de toonaard E en B is de verhouding voor de kleine terts gelijk aan 6/5 = 1,2. Alle andere verhoudingen zijn aanzienlijk te klein. De grootste afwijkingen zitten in de toonaard Des en As met een verhouding 20/17 = 1,17647.

Alleen voor de toonaard C en G is de verhouding voor de grote terts gelijk aan 5/4 = 1,25. Alle andere verhoudingen zijn aanzienlijk te groot. De grootste afwijking zit in de toonaard E met een verhouding 51/40 = 1,275.

4 Berekening van de frequenties in Hz voor een A = 440 Hz

Wat nu nog ontbreekt, is de berekening van de werkelijke frequenties van de chromatische tonen wanneer aangenomen wordt dat de frequentie van de A onder de lage C, 440 Hz is. Dit betekent dat de frequentie voor de A tussen de lage en de hoge C twee maal zo hoog en dus 880 Hz is. De verhouding tussen de frequentie van de lage C en de A tussen de lage en de hoge C is 1 / 27/16 = 16/27 = 0,59259. Als de frequentie van deze A 880 Hz is, dan heeft de lage C dus een frequentie van 0,59259 * 880 = 521,48148 Hz.

De harmonische frequenties f_{harm} van de overige elf chromatische tonen worden dan gevonden door de verhoudingen uit tabel 1 te vermenigvuldigen met een factor 521,48148. De gelijkzwevende frequenties f_{gelijk} worden ook gegeven in tabel 4. De waardes werden afgerond op twee decimalen achter de komma.

	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C
f_{harm} (Hz)	521,48	554,07	586,67	619,26	651,85	695,31	738,77	782,22	831,11	880,00	928,89	977,78	1042,96
f_{gelijk}(Hz)	521,48	552,49	585,34	620,15	657,03	696,09	737,49	781,34	827,80	877,02	929,17	984,43	1042,96
Afw (%)	0	-0,29	-0,23	+0,14	+0,79	+0,11	-0,17	-0,11	-0,40	-0,34	+0,03	+0,68	0
Afw (c)	0	-4,9	-3,9	+2,4	+13,3	+1,9	-2,9	-1,9	-6,7	-5,7	+0,5	+11,4	0

Tabel 4 Frequentie voor de harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van C

De procentuele afwijking wordt gegeven door de formule:

$$\text{Afwijking} = 100\,(f_{vals} - f_{zuiver}) / f_{zuiver} \quad (\%) \qquad (1)$$

Welke frequentie nu voor f_{vals} en welke voor f_{zuiver} ingevuld moet worden als men de harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming met elkaar wil vergelijken, hangt af van welke stemming men zuiver noemt. In deze notitie wordt de harmonische stemming zuiver genoemd en formule 1 verandert daardoor in:

$$\text{Afwijking} = 100\,(f_{gelijk} - f_{harm}) / f_{harm} \quad (\%) \qquad (2)$$

De berekende afwijking in procenten (Afw (%)) wordt vermeld in de vierde rij van tabel 4. De afwijking geeft dus aan hoeveel % de gelijkzwevende stemming hoger (positief teken) of lager (negatief teken) klinkt dan de harmonische stemming voor de toonaard C.

De procentuele afwijking tussen twee gelijkzwevende tonen die een kleine secunde van elkaar verschillen is ongeveer 5,946 %. Een procentuele afwijking van 0,1 % is dus ongeveer 1/60 van een halve toonafstand. De grootste afwijkingen zitten in de E en de B. De afwijking kan ook in cent worden gegeven. Hierbij geldt dat een rein octaaf 1200 cent is. Dit betekent dat een gelijkzwevende kleine secunde 100 cent is. Daardoor geldt:

$$5{,}946\ \% = 100 \text{ cent ofte wel } 1\ \% = 16{,}82 \text{ cent} \qquad (3)$$

De berekende afwijking in cent (Afw (c)) wordt gegeven in de vijfde rij van tabel 4.

5 Bepaling van de onzuiverheid van de harmonische stemming voor andere toonaarden

Hoewel in tabel 2 en 3 de afwijkingen voor de reine kwint, de reine kwart, de grote terts en de kleine terts als functie van de toonaard al gegeven worden, lijkt het handig om te weten hoe groot de afwijking voor elke individuele toon is, voor elke gebruikelijke toonaard. De frequenties voor alle chromatische tonen van de lage C tot de hoge C, zijn gelijk aan de verhoudingen uit de tweede rij van tabel 1. Nu wordt weer aangenomen dat de lage C, 1 Hz is. De majeurtoonladder van C wordt gevonden door de zwartetoetstonen weg te laten. De volgende procedure wordt gevolgd om de afwijkingen voor elke gangbare toonaard te vinden.

Als je vanuit de C een kwint omhoog gaat krijg je de G. Nu bouw je op de G een nieuwe majeurtoonladder op met dezelfde verhoudingen als die voor de toonaard C gelden en bereken je de frequenties van de tonen voor deze nieuwe toonaard. Deze procedure herhaal je nog vijf keer. Een probleem is dat de tabel erg breed wordt als je alleen maar omhoog gaat. Daarom spring je een octaaf omlaag als je de B of de C bereikt heb maar je moet de berekende frequentie dan wel halveren. Vervolgens ga je weer terug naar C en volg je dezelfde procedure maar nu ga je telkens een kwint omlaag. Voor elke toonaard vind je dat bepaalde frequenties afwijken van die van de majeurtoonladder van C. Het is een hoop rekenwerk en alleen het resultaat van de berekeningen werd in tabel 5 en 6 gezet. Omdat in deze procedure de kwintencirkel gebruikt werd, wordt nu wel onderscheid gemaakt tussen zwartetoetstonen met een is- of met een es-uitgang. De valse tonen zijn rood gekleurd.

toon- aard	B 15/16	C 1	Cis 17/16	D 9/8	Dis 19/16	E 5/4	F 4/3	Fis 17/12	G 3/2	Gis 51/32	A 27/16	Ais 57/32	B 15/8	C 2
C (0#)	15/16	1		9/8		5/4	4/3		3/2		27/16		15/8	2
G (1#)	15/16	1		9/8		81/64		45/32	3/2		27/16		15/8	2
D (2#)	243/256		135/128	9/8		81/64		45/32	3/2		27/16		243/128	
A (3#)	243/256		135/128	9/8		81/64		729/512		405/256	27/16		243/128	
E (4#)	15/16		135/128		75/64	5/4		45/32		25/16	5/3		15/8	
B (5#)	15/16		135/128		75/64	5/4		45/32		405/256		225/128	15/8	
Fis (6#)	17/18		17/16		153/128		85/64	17/12		51/32		85/48	17/9	

Tabel 5 Berekende frequenties voor zes kruistoonaarden voor de harmonische stemming bij gebruik van de kwintencirkel omhoog

In G zijn de valse tonen de E en de Fis. In D zijn de valse tonen de Cis, de E, de Fis en de B. In A zijn de valse tonen de Cis, de E, de Fis, de Gis en de B. In E zijn de valse tonen de Cis, de Dis, de Fis, de Gis en de A. In B zijn de valse tonen de Cis, de Dis, de Fis, de Gis en de Ais. In Fis zijn de valse tonen de Dis en de F (Eis), de Ais en de B.

toon- aard	B 15/16	C 1	Des 17/16	D 9/8	Es 19/16	E 5/4	F 4/3	Ges 17/12	G 3/2	As 51/32	A 27/16	Bes 57/32	B 15/8	C 2
C (0*b*)	15/16	1		9/8		5/4	4/3		3/2		27/16		15/8	2
F (1*b*)		1		9/8		5/4	4/3		3/2		5/3	16/9		2
Bes(2*b*)		513/512		285/256	19/16		171/128		1539/1024		855/512	57/32		513/256
Es (3*b*)		513/512		285/256	19/16		171/128		95/64	19/12		57/32		513/256
As (4*b*)		255/256	17/16		153/128		1377/1024		765/512	51/32		459/256		255/128
Des(5*b*)		255/256	17/16		153/128		85/64	17/12		51/32		459/256		255/128
Ges(6*b*)	17/18		17/16		153/128		85/64	17/12		51/32		85/48	17/9	

Tabel 6 Berekende frequenties voor zes moltoonaarden voor de harmonische stemming bij gebruik van de kwintencirkel omlaag

In F zijn de valse tonen de A en de Bes. In Bes zijn de valse tonen de C, de D, de F, de G en de A. In Es zijn de valse tonen de C, de D, de F, de G en de As. In As zijn de valse tonen de C, de Es, de F, de G en de Bes. In Des zijn de valse tonen de C, de Es, de F en de Bes. In Ges zijn de valse tonen de Es, de F, de Bes en de B (Ces).

In beide tabellen staan dus heel wat rode tonen die dus vals zijn als de toon op een instrument aangeslagen wordt. De afwijking in procenten kan berekend worden met formule 1 maar het is niet direct duidelijk wat nu voor f_{vals} en wat voor f_{zuiver} ingevuld moet worden. De tonen die in tabel 5 en 6 voor de toonaard C gegeven worden zijn zuiver in die toonaard maar voor andere toonaarden zullen sommige van de aangeslagen tonen vals zijn. Van de voor de andere toonaarden berekende frequenties, zijn die tonen vals waarvoor de frequentie rood is. Dit betekent echter niet dat de berekende rode frequentie onjuist is. De toon zou eigenlijk moeten klinken met de berekende rode frequentie en deze frequentie is dus f_{zuiver}. De frequentie die je werkelijk hoort als de toon aangeslagen wordt is de zwarte frequentie die voor deze toon gegeven wordt in de bovenste rij van de tabel en dit is dus f_{vals}. Tabel 5 wordt nu gekopieerd als tabel 7 en tabel 6 wordt gekopieerd als tabel 8. Voor elke toon wordt de afwijking berekend en de frequentie wordt vervangen door de afwijking in %.

toon- aard	B 15/16	C 1	Cis 17/16	D 9/8	Dis 19/16	E 5/4	F 4/3	Fis 17/12	G 3/2	Gis 51/32	A 27/16	Ais 57/32	B 15/8	C 2
C (0#)	0 %	0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		0 %		0 %	0 %
G (1#)	0 %	0 %		0 %		-1,23 %		+0,74 %	0 %		0 %		0 %	0 %
D (2#)	-1,23 %		+0,74 %	0 %		-1,23 %		+0,74 %	0 %		0 %		-1,23 %	
A (3#)	-1,23 %		+0,74 %	0 %		-1,23 %		-0,50 %		+0,74 %	0 %		-1,23 %	
E (4#)	0 %		+0,74 %		+1,33 %	0 %		+0,74%		+2,00 %	+1,25 %		0 %	
B (5#)	0 %		+0,74 %		+1,33 %	0 %		+0,74%		+0,74 %		+1,33 %	0 %	
Fis (6#)	-0,74 %		0 %		-0,65 %		+0,39 %	0 %		0 %		+0,59 %	-0,74 %	

Tabel 7 Berekende afwijking (%) voor zes kruistoonaarden voor de harmonische stemming bij gebruik van de kwintencirkel omhoog

toon- aard	B 15/16	C 1	Des 17/16	D 9/8	Es 19/16	E 5/4	F 4/3	Ges 17/12	G 3/2	As 51/32	A 27/16	Bes 57/32	B 15/8	C 2
C (0*b*)	0 %	0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		0 %		0 %	0 %
F (1*b*)		0 %		0 %		0 %	0 %		0 %		+1,25 %	+0,20 %		0 %
Bes(2*b*)		-0,19 %		+1,05 %	0 %		-0,19 %		-0,19 %		+1,05 %	0 %		-0,19 %
Es (3*b*)		-0,19 %		+1,05 %	0 %		-0,19 %		+1,05 %	+0,66%		0 %		-0,19 %
As (4*b*)		+0,39 %	0 %		-0,65 %		-0,85 %		+0,39%	0 %		-0,65 %		+0,39 %
Des(5*b*)		+0,39 %	0 %		-0,65 %		+0,39 %	0 %		0 %		-0,65 %		+0,39 %
Ges(6*b*)	-0,74%		0 %		-0,65 %		+0,39 %	0 %		0 %		+0,59 %	-0,74%	

Tabel 8 Berekende afwijking (%) voor zes moltoonaarden voor de harmonische stemming bij gebruik van de kwintencirkel omlaag

In tabel 7 en 8 kan gezien worden dat vooral in de tabel met de kruistoonaarden, sommige afwijkingen behoorlijk groot zijn. Een afwijking van 5,9 % komt ongeveer overeen met een halve toonafstand en een afwijking van 1 % komt dus al overeen met ongeveer 1/6 van een halve toonafstand. Voor bijna elke toonaard zijn er wel tonen met een afwijking groter dan 1 % wat dus erg veel is. De grootste afwijking zit hem in de Gis van de toonaard E met +2,00 %! Deze grote afwijking wordt veroorzaakt door het feit dat 25/16 het product van 5/4 * 5/4 is. 5/4 is de verhouding voor de grote terts die erg klein is t. o. v. de verhouding voor de gelijkzwevende stemming. Dit toont aan dat de harmonische stemming alleen geschikt is voor gebruik in de toonaard van de grondtoon, in dit geval dus voor de toonaard C.

In tabel 7 en 8 is ook te zien dat er tonen zijn die in één tabel in de ene toonaard te hoog en in de andere toonaard te laag zijn. Dit toont aan dat je voor deze harmonische stemming niet eenduidig aan de naam van de toon kunt zien of een toon verhoogd, verlaagd of niet gecorrigeerd moet worden. Dit zou relevant zijn voor instrumenten waarvoor de toonhoogte wel enigszins tijdens het spelen aangepast kan worden. Daardoor kun je niet alleen voor de gelijkzwevende stemming maar ook voor deze harmonische stemming, de tonen net zo goed één naam geven zoals ik doe in mijn notitie “Een notenschrift zonder mollen en kruizen”, die op mijn website te vinden is.