Adriaan Kragten, Sint-Oedenrode 21-10-2017, herzien 16-3-2018

Harmonisch intoneren

Op het Strijkersforum werd een discussie gevoerd over mijn notitie "Een notenschrift zonder mollen en kruizen" In hoofdstuk 2 van deze notitie wordt voorgesteld om aan de zwartetoetstonen waarvan de naam een is- of een es-uitgang heeft, één naam te geven die een samenvoeging is van de naam van de wittetoetstonen waar de betreffende toon tussenin ligt. Een Cis of een Des wordt dan een COD. De noot krijgt in het notenschrift de vorm van een rechthoek en het hart van de rechthoek ligt halverwege het hart van de ronde noten C en D.

Tijdens de discussie werd aangevoerd dat aan de huidige naam van de zwartetoetstonen gezien kan worden hoe deze toon geïntoneerd moet worden als de harmonische stemming gebruikt wordt. Voor de harmonische stemming zouden een Cis en een Des namelijk niet precies dezelfde frequentie hebben (wat ik bestrijd). Voor de gelijkzwevende stemming is dit wel het geval en daar werd in mijn notitie vanuit gegaan. Ik heb bestreden dat je aan de naam van de toon kunt zien hoe de toon geïntoneerd moet worden voor de harmonisch stemming. De argumentatie die ik hierover op het forum geleverd heb volgt hieronder maar per 9-3-2018 werd het verhaal sterk uitgebreid.

Ik zal proberen om duidelijk te maken waarom volgens mij de dubbele toonnamen met een is- of een es-uitgang voor de zwartetoetstonen geen eenduidige informatie geven over de vereiste intonatie om de toon bij de harmonische stemming zuiver te kunnen spelen. Daarvoor is kennis van de harmonische stemming nodig. Die wordt uitgebreid gegeven in Wikipedia maar daar spreekt men over de reine stemming. De link naar Wikipedia is: https://nl.wikipedia.org/wiki.reine_stemming. Ik ben het met het meeste dat in Wikipedia staat wel eens maar niet met alles.

In Wikipedia wordt gesproken over de reine stemming. Er zijn maar een paar intervallen rein die uit de hogere harmonischen kunnen worden afgeleid en ik vind harmonische stemming daarom een betere benaming. In Wikipedia wordt gesproken over boventonen maar ik spreek liever over hogere harmonischen. De grondtoon is de 1^e harmonische. De 1^e boventoon is de 2^e harmonische. De 2^e boventoon is de 3^e harmonische, enz. Het voordeel van het gebruik van de benaming "harmonische" is dat de verhouding tussen de frequentie van bepaalde tonen direct volgt uit de verhouding tussen de rangnummers van de harmonischen. In Wikipedia staat een tabel met de verhouding voor de intervallen uit een majeurtoonladder. Hierbij wordt voor de kleine secunde tussen de 3^e en de 4^e trap en die tussen de 7^e en de 8^e trap een verhouding 16/15 gegeven. Op zich is dit juist maar in een chromatische toonladder zitten nog veel meer kleine secundes en die kunnen niet allemaal een verhouding 16/15 hebben. Hoe groot deze kleine secundes dan wel zijn, zal ik af leiden. Ik bestrijd ook de verhoudingen die in deze tabel voor de kleine en grote sext gegeven worden. In Wikipedia worden alleen de verhoudingen gegeven voor een diatonische toonladder. Er staat: "Er zijn meerdere voorstellen gedaan om de reine zeventonige ladder met nog vijf 'tussentonen' aan te vullen tot een twaalftonige ladder, tot één canonieke versie heeft dat echter niet geleid". Dit lijkt me toch een onbevredigende situatie. Als men een instrument harmonisch wil stemmen dan moet men toch weten hoe alle chromatische tonen gestemd moeten worden. Ik denk dat dit komt doordat men niet hoog genoeg gaat in de harmonische reeks. Tussen de 15^e en de 20^e harmonische ligt een bijna perfecte reeks chromatische tonen.

Bij de harmonische stemming zijn de frequenties van de tonen afgeleid van de hogere harmonischen. Als een snaar trilt, produceert die niet alleen een grondtoon ofte wel eerste harmonische maar ook gelijktijdig nog een hele reeks hogere harmonischen. De frequentie f van deze hogere harmonische is evenredig met het rangnummer van de harmonische. Als de eerste harmonische een frequentie heeft van 1 Hz dan heeft de tweede harmonische een frequentie van 2 Hz, de derde harmonische een frequentie van 3 Hz, enz. Stel nu eens dat de eerste harmonische een A is met een frequentie van 440 Hz. Welke tonen kunnen dan afgeleid worden uit de eerste twintig hogere harmonischen?

Om de tonen goed van elkaar te kunnen onderscheiden geef ik eerst het rangnummer van de harmonische gevolgd door de naam van de toon en ik bereken ook de bijbehorende frequentie. Ik gebruik alleen de naam met een is-uitgang omdat er in de toonladder van A al drie verhoogde tonen zitten. Je krijgt dan het volgende rijtje:

1A, f = 440 Hz
2A, f = 880 Hz
3E, f = 1320 Hz
4A, f = 1760 Hz
5Cis, f = 2200 Hz
6E, f = 2640 Hz
(7G), f = 3080 Hz
8A, f = 3520 Hz
9B, f = 3960 Hz
10Cis, f = 4400 Hz
(11Dis), f = 4840 Hz
12E, f = 5280 Hz
(13F), f = 5720 Hz
(14G), f = 6160 Hz
15Gis, f = 6600 Hz
16A, f = 7040 Hz
17Ais, f = 7480 Hz
18B, f = 7920 Hz
19C, f = 8360 Hz
20Cis, f = 8800 Hz

De 7G, de 11Dis en de 14G zijn aanmerkelijk te laag. De 13F is aanmerkelijk te hoog. Deze tonen worden daarom niet gebruikt en staan daarom tussen haakjes. Uit het bovenstaande lijstje kunnen een aantal tonen afgeleid worden die liggen tussen een A van 440 Hz en een A van 880 Hz. Hierbij geldt dat een toon dezelfde naam houdt als de frequentie gehalveerd wordt. Dit is in het lijstje duidelijk te zien aan de 16A, de 8A, de 4A, de 2A en de 1A en aan de 12E, de 6E en de 3E. In het volgende lijstje heb ik de tonen aangegeven die uit het eerste lijstje kunnen worden afgeleid en die lopen van een A van 440 Hz tot een A van 880 Hz. De acht gegeven tonen zijn dus allemaal grondtonen met ieder zijn eigen reeks hogere harmonischen en zij hebben daarom geen rangnummer.

A, f = 440 Hz
Ais, f = 467,5 Hz
B, f = 495 Hz
C, f = 522,5 Hz
Cis, f = 550 Hz
E, f = 660 Hz
Gis, f = 825 Hz
A, f = 880 Hz

We vinden op deze manier dus de zes tonen Ais, B, C, Cis, E en Gis met de bijbehorende frequenties die liggen tussen de A van 440 Hz en de A van 880 Hz.

De majeurtoonladder van A bestaat uit een opeenvolging van grote en kleine secundes. Een grote secunde wordt ook wel een hele afstand genoemd en een kleine secunde wordt ook wel een halve afstand genoemd. De majeurtonladder van A bestaat uit de tonen: A, B, Cis, D, E, Fis, Gis en A. De afstanden zijn heel, heel, half, heel, heel, heel, half. Deze afstanden gelden voor elke majeurtoonladder. De A is de 1^{e} trap, de B is de 2^{e} trap, de Cis is de 3^{e} trap, enz. Van de majeurtoonladder van A ontbreken nu nog de tonen D en Fis.

De chromatische toonladder van A bestaat uit een opeenvolging van kleine secundes en heeft als tonen A, Ais, B, C, Cis, D, Dis, E, F, Fis, G, Gis, A. Van de chromatische toonladder van A ontbreken nu nog de tonen D, Dis, F, Fis en G.

Uit de verhouding tussen de hogere harmonischen kan direct de frequentieverhouding van sommige intervallen worden afgeleid. Er gelden dan de volgende verhoudingen:
Rein octaaf = 2/1 = 2
Reine kwint = 3/2 = 1,5
Reine kwart = 4/3 = 1,33333
Grote terts = 5/4 = 1,25
Kleine terts = 6/5 = 1,2

Omdat voor de reine kwart een verhouding 4/3 geldt, kan de frequentie van de D direct bepaald worden als f = 440 * 4/3 = 586,66667 Hz.

Er zijn twee verschillende grote secundes namelijk de grote grote secunde die tussen de 9^{e} en de 8^{e} harmonische ligt en waarvoor de verhouding 9/8 = 1,125 is en de kleine grote secunde die tussen de 10^{e} en de 9^{e} harmonische ligt en waarvoor de verhouding 10/9 = 1,11111 is. Tussen de reine kwart en de reine kwint zit ook een grote secunde. Stel dat deze een verhouding X heeft. Er geldt dan dat 4/3 * X = 3/2. Dit geeft dat X = 3/2 * 3/4 = 9/8. Dit interval is dus ook een grote grote secunde.

Tussen de grote septiem en het reine octaaf zit een kleine secunde. Omdat deze tonen afgeleid zijn van de 15^{e} en de 16^{e} harmonische geldt dat de verhouding 16/15 is. Tussen de grote terts en de reine kwart zit ook een kleine secunde. Stel dat deze een verhouding Y heeft. Er geldt dan dat 5/4 * Y = 4/3. Dit geeft dat Y = 4/3 * 4/5 = 16/15. Deze verhouding is dus gelijk aan die tussen de grote septiem en het reine octaaf.

De tonen A, Ais, B, C en Cis zijn afgeleid van de 16^{e}, de 17^{e}, de 18^{e}, de 19^{e} en de 20^{e} harmonische. Tussen al deze tonen zit een kleine secunde maar elke secunde heeft een andere verhouding. De verhouding Ais / A = 17/16. De verhouding B / Ais is 18/17. De verhouding C / B = 19/18. De verhouding Cis / C = 20/19. We hadden al een kleine secunde met een verhouding 16/15 en er zijn dus vijf verschillende kleine secundes.

We gaan nu weer even terug naar de majeurtoonladder van A. Die bestaat uit een eerste deel met de tonen A, B, Cis en D. Het interval tussen de A en de D is een reine kwart en de afstand tussen de tonen is heel, heel, half. Hiervan heeft de eerste hele afstand een verhouding 9/8, de tweede hele afstand een verhouding 10/9 en de daar op volgende halve afstand een verhouding 16/15. Het tweede deel van de majeurtoonladder van A bestaat uit de tonen E, Fis, Cis en A. Het interval tussen de E en de A is ook een reine kwart. De afstand tussen de tonen is ook heel, heel, half.

Het eerste deel van de chromatische toonladder van A bestaat uit de tonen A, Ais, B, C, Cis en D. Het tweede deel van de chromatische toonladder van A bestaat uit de tonen E, F, Fis, G, Gis en A waarvan de F, de Fis en de G nog ontbreken. De frequenties van de F, de Fis en de G worden nu zodanig gekozen dat voor de tonen van het tweede deel van de chromatische toonladder van A precies dezelfde verhoudingen gelden als voor het eerste deel. Dit geeft voor de frequentie van de F dat f = 440 * 3/2 * 17/16 = 440 * 51/32 = 701,25 Hz. Dit geeft voor de frequentie van de Fis dat f = 440 * 3/2 * 17/16 * 18/17 = 440 * 27/16 = 742,5 Hz. Dit geeft voor de frequentie van de Cis dat f = 440 * 3/2 * 17/16 * 18/17 * 19/18 = 440 * 57/32 = 783,75 Hz. Dit geeft voor de frequentie van de Gis dat f = 440 * 3/2 * 17/16 * 18/17 * 19/18 * 20/19 = 440 * 15/8 = 825 Hz. Deze laatste frequentie werd ook al rechtstreeks uit de reeks hogere harmonischen afgeleid wat aangeeft dat de rekenmethode juist is.

Wat nu nog ontbreekt, is de Dis. Er was al eerder bepaald dat tussen de D en de E een grote grote secunde ligt. Deze grote grote secunde wordt nu op dezelfde manier in twee kleine secundes verdeeld als de grote grote secunde tussen de A en de B. Dit geeft voor de frequentie van de Dis dat f = 440 * 4/3 * 17/16 = 440 * 17/12 = 623,33333 Hz.

Ik vind op deze manier voor de overmatige kwart een verhouding 17/12 = 1,41667, voor de kleine sext een verhouding 51/32 = 1,59375, voor de grote sext een verhouding 27/16 = 1,6875, voor de kleine septiem een verhouding 57/32 = 1,78125 en voor de grote septiem een verhouding 15/8 = 1,875.

In Wikipedia wordt voor de kleine sext een verhouding 8/5 = 1,6 en voor de grote sext een verhouding 5/3 = 1,66667 gegeven en er wordt niet uitgelegd waar deze verhoudingen vandaan komen. Voor de overmatige kwart, de kleine septiem en de grote septiem worden geen verhoudingen gegeven. Bij een waarde van 5/3 voor de grote sext kan bepaald worden wat daarvoor de frequentieverhouding van de grote secunde tussen de E en de Fis is. Stel deze verhouding is Z. Er geldt dan dat 3/2 * Z = 5/3. Dit geeft dat Z = 5/3 * 2/3 = 10/9. Dit betekent dat het interval tussen de E en de Fis een kleine grote secunde is. Het interval tussen de Fis en de Cis moet dan een grote grote secunde zijn. Maar volgens mij is de gegeven verhouding van 5/3 voor de grote sext en van 8/5 voor de kleine sext in Wikipedia gewoon fout. Het is heel onlogisch dat het eerste deel van de majeurtoonladder van A begint met een grote grote secunde gevolgd door een kleine grote secunde en dat het tweede deel van de majeurtoonladder van A begint met een kleine grote secunde gevolgd door een grote grote secunde. In de reeks van natuurtonen wordt een grote grote secunde gevolgd door een kleine grote secunde en niet andersom. Ik ga er daarom vanuit dat mijn berekening van de frequenties voor de harmonische stemming van de tonen uit de majeurtoonladder van A juist is. Er bestaan een groot aantal verschillende reine of harmonische stemmingen en deze chromatische versie, waarvoor zeven tonen direct en vijf tonen indirect uit de reeks van hogere harmonischen werden afgeleid, wordt nu "de harmonische stemming" genoemd.

De gevonden frequenties voor de harmonische stemming f_{harm} voor de tonen uit de chromatische toonladder van A worden nu in tabel 1 gezet. Ter vergelijking worden ook de frequenties volgens de gelijkzwevende stemming f_{gelijk} (of beter de evenredig zwevende stemming) gegeven. De frequenties werden in de tabel afgerond op twee cijfers achter de komma. Voor de gelijkzwevende stemming geldt een vaste verhouding tussen tonen die een kleine secunde uit elkaar liggen van $2^{1/12}$ = 1,05946. Op elke rekenmachine kunnen deze machten snel berekend worden door de toets x^y te gebruiken. Om de macht te vinden waartoe 2 verheven moet worden voor een bepaald interval telt men het aantal kleine secundes van dat interval. Voor een reine kwint is de verhouding $2^{7/12}$ = 1,49831. Een gelijkzwevende reine kwint is dus een heel klein beetje kleiner dan een harmonische reine kwint waarvoor de verhouding 1,5 is. Voor een reine kwart is de verhouding $2^{5/12}$ = 1,33485. Een gelijkzwevende reine kwart is dus een heel klein beetje groter dan een harmonische reine kwart waarvoor de verhouding 1,33333 is. Voor een grote terts is de verhouding $2^{4/12}$ = 1,25992. Een gelijkzwevende grote terts is dus aanmerkelijk groter dan een harmonische grote terts waarvoor de verhouding 1,25 is. Voor een kleine terts is de verhouding $2^{3/12}$ = 1,18921. Een gelijkzwevende kleine terts is dus aanmerkelijk kleiner dan een harmonische kleine terts waarvoor de verhouding 1,2 is. Het grootste verschil tussen de harmonische en de gelijkzwevende stemming zit daarom in de tertsen en niet in de kwarten of kwinten.

	A	Ais	B	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A
f_{harm} (Hz)	440	467,5	495	522,5	550	586,67	623,33	660	701,25	742,5	783,75	825	880
f_{gelijk}(Hz)	440	466,16	493,88	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880
verhouding	1	17/16	9/8	19/16	5/4	4/3	17/12	3/2	51/32	27/16	57/32	15/8	2

Tabel 1 Frequentie voor de harmonische en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van A

Bij deze afleiding vinden we voor de harmonische stemming en voor de gelijkzwevende stemming voor elke chromatische toon een eenduidige frequentie. Aan tabel 1 werd aan de onderkant nog een rij toegevoegd waarin de verhouding staat van de betreffende toon t. o. v. de lage A volgens de harmonische stemming. Deze verhouding is het product van de verhoudingen van de kleine secundes van de tussenliggende intervallen.

De harmonische stemming voor een grondtoon A = 440 Hz is het meest gangbaar omdat deze gebruikt wordt voor klassieke klavierinstrumenten maar elk van de twaalf chromatische tonen kan als grondtoon gekozen worden. Daardoor heb je twaalf harmonische stemmingen. Bij de harmonische stemming moeten dan voor de twaalf grondtonen de frequenties aangehouden worden zoals die in tabel 2 gegeven worden voor f_{harm}. Maar men moet bij een andere grondtoon dezelfde verhoudingen tussen de frequenties aanhouden als die gevonden werden voor de chromatische toonladder waarbij A de grondtoon is. Een groot probleem hierbij is dat er vijf verschillende kleine secundes zijn. In het onderstaand lijstje wordt nog eens aangegeven hoe deze vijf verschillende kleine secundes verdeeld zijn over de chromatische toonladder van A.

Ais / A = 17/16
B / Ais = 18/17
C / B = 19/18
Cis / C = 20/19
D / Cis = 16/15
Dis / D = 17/16
E / Dis = 18/17
F / E = 17/16
Fis / F = 18/17
G / Fis = 19/18
Gis / G = 20/19
A / Gis = 16/15

Bij deze verhoudingen moet het product van alle twaalf verhouding 2 zijn. Dit geeft:

$$\frac{17 * 18 * 19 * 20 * 16 * 17 * 18 * 17 * 18 * 19 * 20 * 16}{16 * 17 * 18 * 19 * 15 * 16 * 17 * 16 * 17 * 18 * 19 * 15} = \frac{20 * 18 * 20}{15 * 16 * 15} = 2$$

De gevonden verhoudingen kloppen dus.

Als men op een in A harmonisch gestemde piano een chromatische toonladder van A speelt dan klopt deze toonladder precies met de harmonische stemming. Maar als men op deze piano een chromatische toonladder in bijvoorbeeld D speelt (dus met 1 kruis minder dan A) dan klopt de vereiste opeenvolging van verhoudingen tussen de diverse kleine secundes al helemaal niet meer. De verhoudingen worden dan:

Dis / D = 17/16
E / Dis = 18/17
F / E = $\underline{17/16}$
Fis / F = $\underline{18/17}$
G / Fis = $\underline{19/18}$
Gis / G = $\underline{20/19}$
A / Gis = $\underline{16/15}$
Ais / A = 17/16
B / Ais = 18/17
C / B = 19/18
Cis / C = 20/19
D / Cis = 16/15

De vijf verkeerde verhoudingen zijn onderstreept. Als men een toonaard van E kiest (dus met een kruis meer dan A) dan blijkt dat de laatste vijf verhoudingen verkeerd zijn.

Om nu een harmonisch zuiver toonladder van D te spelen zou de piano gestemd moeten worden met de D als grondtoon maar het is natuurlijk ondoenlijk om een piano voor elke toonaard opnieuw te stemmen. Alleen met elektronische instrumenten zou dit kunnen.

Als men in de toonaard van G, met dus nog een kruis minder speelt, komen er nog weer vijf verkeerde noten bij. Als men in de toonaard van C, met dus nog een kruis minder speelt komen er weer vijf verkeerde noten bij. Bij zes kruizen minder heeft men dus al 30 verkeerde noten. De ene keer zal een bepaalde verkeerde noot te hoog zijn en de andere keer te laag. Daardoor is het zo dat men aan de naam van een zwartetoetstoon niet kan zien of deze toon verhoogd of verlaagd moet worden als men in een andere toonaard speelt dan in A. Ik hoop hiermee aangetoond te hebben dat de harmonische stemming in A voor een instrument met vaste frequenties voor elke toon, werkelijk een ramp is en dat men veel beter gebruik kan maken van de gelijkzwevende stemming.

Op een viool, een ander strijkinstrument zonder fretten of een schuiftrombone kun je elke toon grondtoon maken en vanuit elke grondtoon een reeks harmonische tonen spelen. Daarom kun je op deze instrumenten wel in twaalf harmonische stemmingen zuiver spelen.

De vraag blijft hoe nu hoe je wel zuiver kunt intoneren in de harmonische stemming als je daarvoor geen gebruik kunt maken van de naam van de toon. Ik zal me bij het antwoord op deze vraag in eerste instantie beperken tot het zuiver spelen van een reine kwint.

Als er twee tonen gelijktijdig gespeeld worden dan kun je daarbij een zweving horen. De frequentie van de zweving is gelijk aan het verschil van de beide frequenties. Als je dus op het ene instrument een A speelt van 440 Hz en op het andere instrument een A van 441 Hz dan hoor je een zweving met een frequentie van 1 Hz. Je kunt ook zwevingen horen tussen hogere harmonischen. Stel je speelt gelijktijdig een A van 440 Hz en een E van 660 Hz. De derde harmonische van de A heeft dan een frequentie van 3 * 440 = 1320 Hz en is een E. De tweede harmonische van de E heeft dan een frequentie van 2 * 660 = 1320 Hz en is dus ook een E. Omdat beide frequenties precies aan elkaar gelijk zijn hoor je dus geen zweving in de tamelijk lage gemeenschappelijke hogere harmonischen. Dit wordt door het menselijk oor als zuiver ervaren en daarom wordt de kwint ook rein genoemd.

Je moet dus bij de harmonische stemming zo intoneren dat je bij reine kwinten geen zweving hoort. Dit geldt ook voor reine kwarten. Daarvoor gaat het om de zweving tussen de vierde harmonische van de laagste toon en de derde harmonische van de hoogste toon. Het geldt in beginsel ook voor grote en kleine tertsen. Voor grote tertsen gaat het om de zweving tussen de vijfde harmonische van de laagste toon en de vierde harmonische van de hoogste toon. Voor kleine tertsen gaat het om de zweving tussen de zesde harmonische van de laagste toon en de vijfde harmonische van de hoogste toon. Echter, voor tertsen kan de frequentie van de zweving al zo hoog zijn dat de zweving niet meer goed kan worden waargenomen.

Voor de gelijkzwevende stemming geldt dat de verhouding tussen een reine kwint gelijk is aan $2^{7/12}$ = 1,49831. Dit is dus niet precies gelijk aan een factor 1,5 en daarom hoor je bij een reine kwint in de gelijkzwevende stemming een zweving tussen de derde hogere harmonische van de laagste toon en de tweede hogere harmonische van de hoogste toon.

Behalve de harmonische en de gelijkzwevende stemming is ook nog een stemming mogelijk die een combinatie is van beiden. Hierbij speelt men wel harmonische reine kwarten en reine kwinten maar gelijkzwevende grote en kleine tertsen. Als verschillende blazers samenspelen met een gelijkzwevend gestemde piano kunnen de blazers dan wel harmonische reine kwinten en reine kwarten spelen. Door het geringe verschil in stemming tussen deze intervallen zal het niet erg opvallen dat deze tonen niet precies stemmen met de piano. Maar de zuiverheid tussen de blazers onderling is wel zeer goed. Maar de blazers moeten wel gelijkzwevende tertsen (en andere intervallen) spelen want anders wordt het verschil in stemming met de piano veel te groot.

Deze optie bracht mij op het idee voor een alternatieve harmonische stemming die dichter tegen de gelijkzwevende stemming aan zit. Bij deze alternatieve harmonische stemming blijven de reine kwint en de reine kwart beiden harmonisch en dus echt rein. De tertsen wijken echter af van de normale harmonische stemming.

Het grote verschil tussen de harmonische en de gelijkzwevende stemming is dat de harmonische grote terts veel kleiner is dan de gelijkzwevende grote terts en dat de harmonisch kleine terts veel groter is dan de gelijkzwevende kleine terts. Het gevolg hiervan en van het gebruik kleine secundes die afgeleid zijn van de 15^e t/m de 20^e harmonische, is dat de grootte van de kleine secundes tussen de A en de Cis geleidelijk afneemt met factoren 17/16, 18/17, 19/18 en 20/19 maar dan voor de kleine secunde tussen de Cis en de D plotseling toeneemt met een factor 16/15. Het is de vraag of iemand die zonder begeleiding een chromatische toonladder op een viool speelt of zingt dit werkelijk zal doen.

Van de vier verhoudingen 17/16, 18/17, 19/18 en 20/19 ligt de verhouding 18/17 het dichtst bij de verhouding voor een gelijkzwevende kleine secunde. Er geldt namelijk dat 18/17 = 1,05882 en dat $2^{1/12}$ = 1,05946. De factor 18/17 / $2^{1/12}$ = 1,05882 / 1,05946 = 0,99939 en deze factor is dus nagenoeg gelijk aan 1.

De grote terts kan op een eenvoudige manier verhoogd worden door voor de vier kleine secundes tussen de A, de Ais, de B, de C en de Cis en tussen de E, de F, de Fis, de G en de Gis de verhouding 18/17 te gebruiken. De grote grote secunde tussen de D en de E blijft verdeeld in een kleine secunde met een verhouding 17/16 en een kleine secunde met een verhouding 18/17 zoals dat bij de gewone harmonische stemming ook al gedaan werd.

Het gevolg van het gebruik van vier secundes na elkaar met een verhouding 18/17 is dat de kleine secunde tussen de Cis en de D en tussen de Gis en de A kleiner wordt en dat er nu nog maar drie verschillende kleine secundes zijn. De vraag is nu hoe groot de kleine secunde wordt tussen de Cis en de D en tussen de Gis en de A. Stel dat deze kleine secunde een verhouding Y heeft. Er geldt dan dat:

18/17 * 18/17 * 18/17 * 18/17 * Y = 4/3 ofte wel
Y = 4/3 * 17/18 * 17/18 * 17/18 * 17/18 ofte wel
Y = 83521/78732 = 1,06083

Een gelijkzwevende kleine secunde heeft een verhouding $2^{1/12}$ = 1,05946. Y is dus maar iets groter (een factor 1,00129) dan een gelijkzwevende kleine secunde. De oorspronkelijk verhouding tussen de Cis en de D en tussen de Gis en de A was 16/15 = 1,06667 wat dus aanzienlijk groter is (een factor 1,00681) dan 1,06083. Voor een grote terts vinden we nu een verhouding $(18/17)^4$ = 1,25688. Voor een gelijkzwevende grote terts geldt de verhouding $2^{4/12}$ = 1,25992 wat maar iets groter is. Voor de harmonische grote terts geldt de verhouding 5/4 = 1,25 wat dus aanzienlijk kleiner is dan 1,25688.

Ik zal in deze notitie nog meer alternatieve harmonische stemmingen beschrijven en dit is de 1^e. Deze 1^e alternatieve harmonische stemming zit dus zeer dicht tegen de gelijkzwevende stemming aan maar heeft wel een harmonische reine kwart en een harmonische reine kwint. Tabel 1 wordt nu gekopieerd als tabel 2 maar voor f_{harm} worden nu de waardes voor f ingevuld die voor de alternatieve harmonische stemming kunnen worden berekend op de manier zoals die ook eerder ook toegepast werd voor de gewone harmonische stemming. We krijgen voor sommige tonen in de onderste rij wel verhoudingen met grote termen in de teller en de noemer maar dat hoeft voor het stemmen geen bezwaar te zijn als een stemapparaat gebruikt wordt waar de frequentie van f_{harm} op afgelezen kan worden.

	A	Ais	B	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A
f_{harm} (Hz)	440	465,88	493,29	522,30	553,03	586,67	623,33	660	698,82	739,93	783,46	829,54	880
f_{gelijk}(Hz)	440	466,16	493,88	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880
verhouding	1	18/17	324/289	5832/4913	104976/83521	4/3	17/12	3/2	54/34	972/578	17496/9826	314928/167042	2

Tabel 2 Frequentie voor de 1^e alternatieve harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van A

In het onderstaand lijstje wordt nog eens aangegeven hoe de drie verschillende kleine secundes verdeeld zijn over de chromatische toonladder van A.

Ais / A = 18/17
B / Ais = 18/17
C / B = 18/17
Cis / C = 18/17
D / Cis = 83521/78732
Dis / D = 17/16
E / Dis = 18/17
F / E = 18/17
Fis / F = 18/17
G / Fis = 18/17
Gis / G = 18/17
A / Gis = 83521/78732

Als men op een in A harmonisch gestemde piano een chromatische toonladder van A speelt dan klopt deze toonladder precies met deze alternatieve harmonische stemming. Maar als men op deze piano een chromatische toonladder in bijvoorbeeld D speelt (dus met 1 kruis minder dan A) dan klopt de vereiste opeenvolging van verhoudingen tussen de diverse kleine secundes niet meer. De verhoudingen worden dan:

Dis / D = 17/16
E / Dis = 18/17
F / E = 18/17
Fis / F = 18/17
G / Fis = 18/17
Gis / G = 18/17
A / Gis = 83521/78732
Ais / A = 18/17
B / Ais = 18/17
C / B = 18/17
Cis / C = 18/17
D / Cis = 83521/78732

Er blijken nu vier verkeerde verhoudingen te zijn en deze zijn onderstreept. Deze 1^e alternatieve harmonische stemming heeft dus één minder valse noot dan de gewone harmonische stemming als in een toonaard gespeeld wordt die één kruis afwijkt van A. Dit komt omdat er nu nog maar drie verschillende kleine secundes zijn. De afwijkingen zullen echter wel kleiner zijn omdat de gelijkzwevende stemming veel dichter benaderd wordt. Maar ik vind dat men nog steeds beter de gelijkzwevende stemming kan gebruiken dan deze 1^e alternatieve harmonische stemming.

Het is mogelijk om de gelijkzwevende stemming nog dichter te benaderen door slechts twee verschillende kleine secundes te gebruiken. Hierbij worden de vijf kleine secundes tussen de A en de D en de vijf kleine secundes tussen de E en de A aan elkaar gelijk gemaakt. De twee kleine secundes tussen de D en de E worden ook aan elkaar gelijk gemaakt. In dit geval is het niet mogelijk om de frequentieverhouding van een kleine secunde te schrijven als een quotiënt van twee hele getallen maar dat lijkt geen bezwaar als bij het stemmen een apparaat gebruikt wordt dat de frequentie nauwkeurig weergeeft.

De vraag is nu hoe groot de tien kleine secundes worden tussen de A en de D en tussen de E en de A. Stel dat deze kleine secunde een verhouding Y heeft. Er geldt dan dat:

$Y^5 = 4/3$ ofte wel
$Y = 4/3^{1/5}$ ofte wel
$Y = 1{,}05922$

Een gelijkzwevende kleine secunde heeft een verhouding $2^{1/12}$ = 1,05946. Y is dus maar iets kleiner (een factor 0,99978) dan een gelijkzwevende kleine secunde. Voor een grote terts vinden we nu een verhouding $(4/3)^{4/5}$ = 1,25878. Voor een gelijkzwevende grote terts geldt de verhouding $2^{4/12}$ = 1,25992 wat maar iets groter is. Voor de harmonische grote terts geldt de verhouding 5/4 = 1,25 wat dus aanzienlijk kleiner is dan 1,25878.

De vraag is ook hoe groot de twee kleine secundes worden tussen de D en de E. Stel dat deze kleine secunde een verhouding Z heeft. Er geldt dan dat:

$4/3 * Z^2 = 3/2$ ofte wel
$Z^2 = 3/2 * 3/4 = 9/8$ ofte wel
$Z = 9/8^{1/2}$ ofte wel
$Z = 1,06066$

Een gelijkzwevende kleine secunde heeft een verhouding $2^{1/12}$ = 1,05946. Z is dus maar iets groter (een factor 1,00113) dan een gelijkzwevende kleine secunde.

Deze 2^e^ alternatieve harmonische stemming zit dus nog dichter tegen de gelijkzwevende stemming aan dan de 1^e^ alternatieve harmonische stemming en heeft ook een harmonische reine kwart en een harmonische reine kwint. De Dis is zelfs exact gelijk aan de Dis van de gelijkzwevende stemming. Tabel 2 wordt nu gekopieerd als tabel 3 maar voor f_{harm} worden nu de waardes voor f ingevuld die voor deze 2^e^ alternatieve harmonische stemming kunnen worden berekend op de manier zoals die ook eerder ook toegepast werd voor de gewone harmonische stemming. De verhoudingen van de tonen t. o. v. de lage A worden gegeven als termen waarin machten voorkomen.

	A	Ais	B	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A
f_{harm} (Hz)	440	466,06	493,66	522,90	553,86	586,67	622,25	660	699,09	740,49	784,35	830,80	880
f_{gelijk}(Hz)	440	466,16	493,88	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880
verhouding	1	$4/3^{1/5}$	$4/3^{2/5}$	$4/3^{3/5}$	$4/3^{4/5}$	4/3	$4/3 * 9/8^{1/2}$	3/2	$3/2 * 4/3^{1/5}$	$3/2 * 4/3^{2/5}$	$3/2 * 4/3^{3/5}$	$3/2 * 4/3^{4/5}$	2

Tabel 3 Frequentie voor de 2^e^ alternatieve harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van A

In het onderstaand lijstje wordt nog eens aangegeven hoe de twee verschillende kleine secundes verdeeld zijn over de chromatische toonladder van A.

Ais / A = $4/3^{1/5}$
B / Ais = $4/3^{1/5}$
C / B = $4/3^{1/5}$
Cis / C = $4/3^{1/5}$
D / Cis = $4/3^{1/5}$
Dis / D = $9/8^{1/2}$
E / Dis = $9/8^{1/2}$
F / E = $4/3^{1/5}$
Fis / F = $4/3^{1/5}$
G / Fis = $4/3^{1/5}$
Gis / G = $4/3^{1/5}$
A / Gis = $4/3^{1/5}$

Als men op een in A harmonisch gestemde piano een chromatische toonladder van A speelt dan klopt deze toonladder precies met deze alternatieve harmonische stemming. Maar als men op deze piano een chromatische toonladder in bijvoorbeeld D speelt (dus met 1 kruis minder dan A) dan klopt de vereiste opeenvolging van verhoudingen tussen de diverse kleine secundes niet meer.

De verhoudingen worden dan:

Dis / D = $\underline{9/8^{1/2}}$
E / Dis = $\underline{9/8^{1/2}}$
F / E = $4/3^{1/5}$
Fis / F = $4/3^{1/5}$
G / Fis = $4/3^{1/5}$
Gis / G = $\underline{4/3^{1/5}}$
A / Gis = $\underline{4/3^{1/5}}$
Ais / A = $4/3^{1/5}$
B / Ais = $4/3^{1/5}$
C / B = $4/3^{1/5}$
Cis / C = $4/3^{1/5}$
D / Cis = $4/3^{1/5}$

Er blijken nog steeds vier verkeerde verhoudingen te zijn en deze zijn onderstreept. Deze 2e alternatieve harmonische stemming heeft dus ook één minder valse noot dan de gewone harmonische stemming als in een toonaard gespeeld wordt die één kruis afwijkt van A. De afwijkingen zullen echter nog kleiner zijn omdat de gelijkzwevende stemming nog dichter benaderd wordt. Ik heb ook nog geprobeerd hoeveel verkeerde verhoudingen er zijn als men zes kruizen minder kiest (dus voor de toonaard van Es) en dan blijken er maar vijf verkeerde verhoudingen te zijn. Het nadeel van alle tot nu toe beschreven harmonische stemmingen is dat alleen voor de grondtoon A de reine kwart en de reine kwint harmonisch en dus echt rein zijn. Hoewel de 2e alternatieve harmonische stemming erg dicht tegen de gelijkzwevende stemming aanzit, is ook voor deze stemming de kwart en de kwint alleen harmonisch voor de toonaard A. Voor alle andere toonaarden zijn de kwart en de kwint niet precies harmonisch en daarom kan volgens mij net zo goed de gelijkzwevende stemming genomen worden.

Het lijkt echter mogelijk om voor nog meer toonaarden een perfecte harmonische kwart en kwint te realiseren maar daarvoor moet het aantal kleine secundes waarvoor een verhouding $9/8^{1/2}$ geldt, verhoogd worden van twee naar zes. Als eis geldt ook dat er telkens twee kleine secundes met een verhouding $9/8^{1/2}$ als een blok naast elkaar moeten zitten. Binnen een octaaf blijven er dan nog zes kleine secundes over die een andere verhouding hebben. De verhouding $9/8^{1/2}$ is iets groter dan een gelijkzwevende kleine secunde waarvoor de verhouding $2^{1/12}$ is. Dit betekent dat de verhouding voor de zes overblijvende kleine secundes iets kleiner moet zijn dan $2^{1/12}$. Er zitten dus zes grote kleine secundes en zes kleine kleine secundes in een octaaf. De kleine kleine secundes kunnen op verschillende manieren verdeeld worden. Na enig experimenteren bleek dat de optimale verdeling zodanig is dat er telkens een blok van twee kleine kleine secundes naast een blok van twee grote kleine secundes zit. Dit betekent dat er tussen de A en de Ais een kleine kleine secunde zit, dat er tussen de Ais en de B en tussen de B en de C een grote kleine secunde zit, dat er tussen de C en de Cis en tussen de Cis en de D een kleine kleine secunde zit, dat er tussen de D en de Dis en tussen de Dis en de E een grote kleine secunde zit, dat er tussen de E en de F en tussen de F en de Fis een kleine kleine secunde zit, dat er tussen de Fis en de G en tussen de G en de Gis een grote kleine secunde zit en dat er tussen de Gis en de A een kleine kleine secunde zit.

De vraag is nu hoe groot een kleine kleine secunde is. Het interval van de reine kwart tussen de A en de D bevat drie kleine kleine secundes en twee grote kleine secundes. Het interval van de reine kwint tussen de A en de E bevat drie kleine kleine secundes en vier grote kleine secundes. Stel dat de verhouding van een kleine kleine secunde Y is. Er geldt dan dat:

$Y^3 * (9/8^{1/2})^2 = 4/3$ ofte wel
$Y^3 * 9/8 = 4/3$ ofte wel
$Y^3 = 4/3 * 8/9 = 32/27$ ofte wel
$Y = 32/27^{1/3} = 1{,}05827$

Een gelijkzwevende kleine secunde heeft een verhouding $2^{1/12}$ = 1,05946. Y is dus maar iets kleiner (een factor 0,99887) dan een gelijkzwevende kleine secunde. De grote kleine secunde was Z en Z was een factor 1,00113 groter dan een gelijkzwevende kleine secunde. De factor voor Z is dus 0,00113 groter en de factor voor Y is 1 – 0,99887 = 0,00113 kleiner dan 1. Het gevolg hiervan is dat de som van een kleine kleine secunde plus een grote kleine secunde gelijk is aan de som van twee gelijkzwevende kleine secundes. Het gevolg hiervan is weer dat behalve de lage en de hoge A ook de frequenties van B, de Cis, de Dis, de F en de G exact gelijk zijn aan die van de gelijkzwevende stemming! De overige zes tonen zijn iets hoger of iets lager. Deze 3^e alternatieve harmonische stemming zit daardoor nog dichter tegen de gelijkzwevende stemming aan dan de 2^e alternatieve harmonische stemming. Tabel 3 wordt nu gekopieerd als tabel 4 maar voor f_{harm} worden nu de waardes voor f ingevuld die voor deze 3^e alternatieve harmonische stemming kunnen worden berekend op de manier zoals die ook eerder ook toegepast werd voor de gewone harmonische stemming. De verhoudingen van de tonen t. o. v. de lage A worden gegeven als termen waarin machten voorkomen.

	A	Ais	B	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A
f_{harm} (Hz)	440	465,64	493,88	523,84	554,37	586,67	622,25	660	698,46	739,15	783,99	831,55	880
f_{gelijk}(Hz)	440	466,16	493,88	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880
verhouding	1	$32/27^{1/3}$	$32/27^{1/3}$ * $9/8^{1/2}$	$32/27^{2/3}$ * 9/8	32/27 * 9/8	4/3	4/3 * $9/8^{1/2}$	3/2	3/2 * $32/27^{1/3}$	3/2 * $32/27^{2/3}$	3/2 * $9/8^{1/2}$ * $32/27^{2/3}$	3/2 * 9/8 * $32/27^{2/3}$	2

Tabel 4 Frequentie voor de 3^e alternatieve harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van A

In het onderstaand lijstje wordt nog eens aangegeven hoe de twee verschillende kleine secundes verdeeld zijn over de chromatische toonladder van A.

Ais / A = $32/27^{1/3}$
B / Ais = $9/8^{1/2}$
C / B = $9/8^{1/2}$
Cis / C = $32/27^{1/3}$
D / Cis = $32/27^{1/3}$
Dis / D = $9/8^{1/2}$
E / Dis = $9/8^{1/2}$
F / E = $32/27^{1/3}$
Fis / F = $32/27^{1/3}$
G / Fis = $9/8^{1/2}$
Gis / G = $9/8^{1/2}$
A / Gis = $32/27^{1/3}$

Wanneer we de chromatische toonladder van Cis samenstellen dan vinden we voor de verhoudingen van deze tonen dat:

D / Cis = $32/27^{1/3}$
Dis / D = $9/8^{1/2}$
E / Dis = $9/8^{1/2}$
F / E = $32/27^{1/3}$
Fis / F = $32/27^{1/3}$
G / Fis = $9/8^{1/2}$
Gis / G = $9/8^{1/2}$
A / Gis = $32/27^{1/3}$
Ais / A = $32/27^{1/3}$
B / Ais = $9/8^{1/2}$
C / B = $9/8^{1/2}$
Cis / C = $32/27^{1/3}$

Dit blijken precies dezelfde verhoudingen te zijn als voor de toonladder van A. Wanneer we de chromatische toonladder van F samenstellen dan vinden we voor de verhoudingen van deze tonen dat:

Fis / F = $32/27^{1/3}$
G / Fis = $9/8^{1/2}$
Gis / G = $9/8^{1/2}$
A / Gis = $32/27^{1/3}$
Ais / A = $32/27^{1/3}$
B / Ais = $9/8^{1/2}$
C / B = $9/8^{1/2}$
Cis / C = $32/27^{1/3}$
D / Cis = $32/27^{1/3}$
Dis / D = $9/8^{1/2}$
E / Dis = $9/8^{1/2}$
F / E = $32/27^{1/3}$

Dit blijken ook precies dezelfde verhoudingen te zijn als voor de toonladder van A. Behalve voor de chromatische toonladder van A zijn er dus nog twee chromatische toonladders waarvoor de verhoudingen hetzelfde zijn als voor die van A. Deze twee extra chromatische toonladders zullen dus ook zuivere harmonische kwarten en kwinten hebben! Dit is iets bijzonders voor chromatische harmonische toonladders.

Tussen de A en de Cis liggen de drie tonen Ais, B en C en voor de chromatische toonladders die deze tonen als grondtoon hebben zullen de reine kwarten en kwinten niet precies zuiver harmonisch zijn. Deze drie chromatische toonladders hebben elk een eigen kleuring en zullen in detail bekeken worden. Vanwege de symmetrie van de kleine kleine secundes en de grote kleine secundes zal men tussen de Cis en de F en tussen de F en de A dezelfde drie soorten chromatische toonladders vinden.

Wanneer we de chromatische toonladder van Ais samenstellen dan vinden we voor de verhoudingen van deze tonen dat:

B / Ais = $\underline{9/8^{1/2}}$
C / B = $\underline{9/8^{1/2}}$
Cis / C = $\underline{32/27^{1/3}}$
D / Cis = $\underline{32/27^{1/3}}$
Dis / D = $\underline{9/8^{1/2}}$
E / Dis = $\underline{9/8^{1/2}}$
F / E = $\underline{32/27^{1/3}}$
Fis / F = $\underline{32/27^{1/3}}$
G / Fis = $\underline{9/8^{1/2}}$
Gis / G = $\underline{9/8^{1/2}}$
A / Gis = $\underline{32/27^{1/3}}$
Ais / A = $\underline{32/27^{1/3}}$

Alle verkeerde verhoudingen zijn onderstreept. Het blijkt dat er geen enkele verhouding overeenkomt met de chromatische toonladder van A. De reine kwart tussen de Ais en de Dis bevat twee kleine en drie grote kleine secundes en is dus iets te groot. De reine kwint tussen de Ais en de F bevat drie kleine en vier grote kleine secundes en is dus precies goed. Omdat er toch zes van de twaalf tonen dezelfde frequentie hebben als die van de gelijkzwevende stemming en de andere zes tonen daarvan maar heel weinig afwijken, lijkt het mij dat de chromatische toonladder van Ais nog steeds goed te gebruiken is.

Wanneer we de chromatische toonladder van B samenstellen dan vinden we voor de verhoudingen van deze tonen dat:

C / B = $\underline{9/8^{1/2}}$
Cis / C = $\underline{32/27^{1/3}}$
D / Cis = $\underline{32/27^{1/3}}$
Dis / D = $\underline{9/8^{1/2}}$
E / Dis = $\underline{9/8^{1/2}}$
F / E = $\underline{32/27^{1/3}}$
Fis / F = $\underline{32/27^{1/3}}$
G / Fis = $\underline{9/8^{1/2}}$
Gis / G = $\underline{9/8^{1/2}}$
A / Gis = $\underline{32/27^{1/3}}$
Ais / A = $\underline{32/27^{1/3}}$
B / Ais = $\underline{9/8^{1/2}}$

Alle verkeerde verhoudingen zijn onderstreept. Het blijkt dat er ook nu geen enkele verhouding overeenkomt met de chromatische toonladder van A. De reine kwart tussen de B en de E bevat twee kleine en drie grote kleine secundes en is dus iets te groot. De reine kwint tussen de B en de Fis bevat vier kleine en drie grote kleine secundes en is dus iets te klein. Omdat er toch zes van de twaalf tonen dezelfde frequentie hebben als die van de gelijkzwevende stemming en de andere zes tonen daarvan maar heel weinig afwijken, lijkt het mij dat de chromatische toonladder van Ais nog steeds goed te gebruiken is. Wanneer we de chromatische toonladder van C samenstellen dan vinden we voor de verhoudingen van deze tonen dat:

Cis / C = $\underline{32/27^{1/3}}$
D / Cis = $\underline{32/27^{1/3}}$
Dis / D = $\underline{9/8^{1/2}}$
E / Dis = $\underline{9/8^{1/2}}$
F / E = $\underline{32/27^{1/3}}$
Fis / F = $\underline{32/27^{1/3}}$
G / Fis = $\underline{9/8^{1/2}}$
Gis / G = $\underline{9/8^{1/2}}$
A / Gis = $\underline{32/27^{1/3}}$
Ais / A = $\underline{32/27^{1/3}}$
B / Ais = $\underline{9/8^{1/2}}$
C / B = $\underline{9/8^{1/2}}$

Alle verkeerde verhoudingen zijn onderstreept. Het blijkt dat er ook nu geen enkele verhouding overeenkomt met de chromatische toonladder van A. De reine kwart tussen de C en de F bevat drie kleine en twee grote kleine secundes en is dus precies goed. De reine kwint tussen de C en de G bevat vier kleine en drie grote kleine secundes en is dus iets te klein. Omdat er toch zes van de twaalf tonen dezelfde frequentie hebben als die van de gelijkzwevende stemming en de andere zes tonen daarvan maar heel weinig afwijken, lijkt het mij dat de chromatische toonladder van Ais nog steeds goed te gebruiken is.

Vanwege de symmetrie tussen de grote kleine secundes en de kleine kleine secundes zullen de afwijkingen die voor de toonaard Ais in de reine kwart en de reine kwint gevonden werden, ook voor de toonaarden D en Fis gelden. De afwijkingen die voor de toonaard B in de reine kwart en de reine kwint gevonden werden, zullen ook voor de toonaarden Dis en G gelden. De afwijkingen die voor de toonaard C in de reine kwart en de reine kwint gevonden werden, zullen ook voor de toonaarden E en Gis gelden.

In de onderstaande tabel 5 werd voor alle twaalf toonaarden aangegeven of de reine kwart en de reine kwint goed, te groot of te klein zijn.

	A	Ais	B	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis
reine kwart	goed	te groot	te groot	goed	goed	te groot	te groot	goed	goed	te groot	te groot	goed
reine kwint	goed	goed	te klein	te klein	goed	goed	te klein	te klein	goed	goed	te klein	te klein

Tabel 5 Overzicht van afwijkingen in de reine kwart en de reine kwint voor twaalf toonaarden

In tabel 5 is te zien dat de reine kwarten goed of te groot zijn en dat de reine kwinten goed of te klein zijn. Er liggen telkens twee dezelfde afwijkingen naast elkaar. Binnen de twaalf toonaarden zijn er zes goede reine kwarten en zes goede reine kwinten. Er zijn echter maar drie toonaarden (A, Cis en F) waarvoor de goede reine kwarten met de goede reine kwinten samenvallen.

Voor de gelijkzwevende stemming zijn alle reine kwarten te groot en alle reine kwinten te klein. Een gelijkzwevende reine kwart heeft een verhouding $2^{5/12}$ = 1,33484. Een harmonische reine kwart heeft een verhouding 4/3 = 1,33333. Een gelijkzwevende reine kwart is dus een factor 1,33484 / 1,33333 = 1,00113 groter. Het verschil met 1 is 0,00113.

Voor de 3^e^ alternatieve harmonische stemming vinden we een te grote reine kwart tussen bijvoorbeeld de B en de E. Voor de frequenties tussen deze twee tonen geldt een verhouding 3/2 / ($32/27^{1/3}$ * $9/8^{1/2}$) = 1,33635. Een harmonische reine kwart heeft een verhouding 4/3 = 1,33333. Een te grote reine kwart is dus een factor 1,33635 / 1,33333 = 1,00226 groter. Het verschil met 1 is 0,00226. Voor de 3^e^ alternatieve harmonische stemming is de afwijking in een te grote reine kwart dus twee maal zo groot als de afwijking in een gelijkzwevende reine kwart. Voor reine kwinten vindt men op dezelfde manier dat de afwijking in een te kleine reine kwint twee maal zo groot is als de afwijking in een gelijkzwevende reine kwint.

Deze 3^e^ alternatieve harmonische stemming heeft dus als voordeel dat er voor twaalf toonaarden zes zuivere harmonische kwarten optreden maar als nadeel dat de afwijking in de zes andere reine kwarten wel twee maal zo groot is als bij de gelijkzwevende stemming. Voor de reine kwinten geldt hetzelfde. Dus elk voordeel heeft zijn nadeel.

Een voordeel van deze 3^e^ alternatieve harmonische stemming is ook dat er drie toonaarden zijn waarvoor de reine kwart en de reine kwint gelijktijdig zuiver zijn. Voor de overige negen chromatische toonladders zijn echter alle verhoudingen verkeerd. Omdat van de twaalf chromatische tonen er zes maar een heel klein beetje afwijken van de gelijkzwevende stemming lijkt het mij dat deze negen toonaarden toch bruikbaar zijn. Het lijkt nuttig om een piano eens te stemmen volgens deze 3^e^ alternatieve harmonische stemming en te kijken of deze stemming voor de drie toonaarden A, Cis en F werkelijk beter klinkt dan de gelijkzwevende stemming en of de stemming voor de andere negen toonaarden nog acceptabel is. Persoonlijk denk ik dat de gelijkzwevende stemming het toch wint als men in alle toonaarden wil spelen.

Voor elektronische klavierinstrumenten zou men nog kunnen overwegen om vier stemmingen in te bouwen namelijk die gelden voor de toonaarden A, Cis en F, voor de toonaarden Ais, D en Fis, voor de toonaarden B, Dis en G en voor de toonaarden C, E en Gis. Elke groep van drie toonaarden zit onder een bepaalde knop en er zijn dus vier knoppen nodig waarmee men snel van stemming kan veranderen. Hiermee is het mogelijk om in alle twaalf toonaarden harmonisch te spelen met zuivere harmonische kwarten en zuivere harmonische kwinten. Voor de gewone harmonische stemming zou men ook zoiets kunnen doen maar dan heeft met twaalf knoppen nodig.

Vroeger werden klavierinstrumenten gestemd met harmonische reine kwinten omdat hiermee gemakkelijk waar te nemen is wanneer er geen zweving optreedt tussen de 3e harmonische van de laagste toon en de 2^e harmonische van de hoogste toon. Deze stemming heeft echter als nadeel dat de onzuiverheid groter wordt naarmate er meer kwinten op elkaar gestapeld worden. Dit komt omdat twaalf gestapelde harmonische reine kwinten niet precies zeven octaven oplevert. Immers, $3/2^{12}$ = 129,74634 en 2^7 = 128.

Stel nu eens dat we in plaats van de A, de C als grondtoon kiezen van de centrale toonaard en dat we drie harmonische reine kwinten omhoog en drie harmonische kwinten omlaag gaan. Voor de frequentie van de lage C wordt in eerste instantie aangenomen dat deze 1 Hz is en dat de frequentie van de hoge C dus 2 Hz is. Als de verhoudingen van alle twaalf tonen bekend zijn wordt later de frequentie van de C zodanig gekozen dat de frequentie van de A onder de lage C, 440 Hz is. Als men vanuit C drie keer een harmonische reine kwint omhoog gaat dan vindt men de tonen G, D en A. Als men vanuit C drie keer een harmonische reine kwint omlaag gaat dan vindt men de tonen F, Bes en Es (voor de zwartetoetstonen worden nu alleen de namen met een es-uitgang gebruikt). Deze stemming is dus hetzelfde als wanneer men vanuit A zes maal een harmonische reine kwint omlaag gaat!

Voor de G boven de lage C geldt nu een frequentie van 3/2 Hz. Voor de D daarboven geldt nu een frequentie van 3/2 * 3/2 = 9/4 Hz. Deze D ligt echter boven de hoge C. De D één octaaf lager heeft een frequentie die de helft is en voor deze D geldt daarom een frequentie van 9/8 Hz. Voor de A daarboven geldt nu een frequentie van 3/2 * 9/8 = 27/16 Hz. De frequentie van de A onder de lage C is de helft en dus 27/32 Hz.

Voor de frequentie van de F wordt uitgegaan van de hoge C. Voor de F daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 2 = 4/3 Hz. Voor de Bes daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 2/3 * 2 = 8/9 Hz. Deze Bes ligt echter onder de lage C. De Bes één octaaf hoger heeft een frequentie die het dubbele is en voor deze Bes geldt daarom een frequentie van 16/9 Hz. Voor de Es daaronder geldt nu een frequentie van 2/3 * 16/9 = 32/27 Hz.

De vijf tonen waarvoor de frequenties nog ontbreken zijn de Des, de E, de Ges, de As en de B. Deze vijf tonen liggen ongeveer in het midden van de vijf grote secundes tussen de C en de D, de Es en de F, de F en de G, de G en de A en de Bes en de C.
Voor de grote secunde tussen de C en de D geldt een verhouding van 9/8 / 1 = 9/8.
Voor de grote secunde tussen de Es en de F geldt een verhouding van 4/3 / 32/27 = 9/8.
Voor de grote secunde tussen de F en de G geldt een verhouding van 3/2 / 4/3 = 9/8.
Voor de grote secunde tussen de G en de A geldt een verhouding van 27/16 / 3/2 = 9/8.
Voor de grote secunde tussen de Bes en de C geldt een verhouding van 2 / 16/9 = 9/8.
Alle vijf de grote secundes hebben dus een verhouding 9/8 wat overeen komt met de grote grote secunde uit het eerste deel van deze notitie over de gewone harmonische stemming. Stel nu dat deze grote secunde op dezelfde manier verdeeld wordt in een grote kleine secunde met een factor 17/16 en een kleine kleine secunde met een factor 18/17.

Voor de Des geldt een frequentie van 1 * 17/16 = 17/16 Hz. Voor de Des boven de hoge C geldt een frequentie van 17/8 Hz. Voor de E geldt een frequentie van 32/27 * 17/16 = 34/27 Hz. Voor de Ges geldt een frequentie van 4/3 * 17/16 = 17/12 Hz. Voor de As geldt een frequentie van 3/2 * 17/16 = 51/32 Hz. Voor de As onder de lage C geldt een frequentie van 51/64 Hz. Voor de B geldt een frequentie van 16/9 * 17/16 = 17/9 Hz. Voor de B onder de lage C geldt een frequentie van 17/18 Hz. De gevonden frequenties werden in tabel 6 gezet. Deze tabel loopt van de As onder de lage C tot de D boven de hoge C. Deze stemming wordt de 4e alternatieve harmonische stemming genoemd. Onderaan tabel 6 werd een rij toegevoegd waarin de verhouding staat voor de betreffende toon met de toon één kleine secunde lager.

As	A	Bes	B	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C	Des	D
51/64	27/32	8/9	17/18	1	17/16	9/8	32/27	34/27	4/3	17/12	3/2	51/32	27/16	16/9	17/9	2	17/8	9/4
					17/16	18/17	256/243	17/16	18/17	17/16	18/17	17/16	18/17	256/243	17/16	18/17		

Tabel 6 Frequenties voor C = 1 Hz voor de 4^e alternatieve harmonische stemming

We hebben nu dus vijf grote kleine secundes met een verhouding 17/16 = 1,06250 en vijf kleine kleine secundes met een verhouding 18/17 = 1,05882. De kleine secunde tussen de D en de Es heeft een verhouding 32/27 / 9/8 = 256/243 = 1,05350 en is dus nog kleiner dan 18/17. De verhouding voor kleine secunde tussen de A en de Bes blijkt ook 256/243 te zijn. Met behulp van tabel 6 is het nu mogelijk om voor elke toonaard te bepalen wat de verhouding voor elk interval is. Belangrijk is dat de reine kwarten en de reine kwinten zuiver harmonisch zijn. Voor de reine kwart zou een verhouding van 4/3 moeten gelden en voor de reine kwint zou een verhouding van 3/2 moeten gelden. Voor elke toonaard worden nu de verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint berekend. Het resultaat staat in tabel 7.

	reine kwart		reine kwint	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - F	4/3 / 1 = 4/3	C - G	3/2 / 1 = 3/2
Des	Des - Ges	17/12 / 17/16 = 4/3	Des - As	51/32 / 17/16 = 3/2
D	D - G	3/2 / 9/8 = 4/3	D - A	27/16 / 9/8 = 3/2
Es	Es - As	51/32 / 32/27 = 1377/1024	Es - Bes	16/9 / 32/27 = 3/2
E	E - A	27/16 / 34/27 = 729/544	E - B	17/9 / 34/27 = 3/2
F	F - Bes	16/9 / 4/3 = 4/3	F - C	2 / 4/3 = 3/2
Ges	Ges - B	17/9 / 17/12 = 4/3	Ges - Des	17/8 / 17/12 = 3/2
G	G - C	2 / 3/2 = 4/3	G - D	9/4 / 3/2 = 3/2
As	As - Des	17/16 / 51/64 = 4/3	As - Es	32/27 / 51/64 = 2048/1377
A	A - D	9/8 / 27/32 = 4/3	A - E	34/27 / 27/32 = 1088/729
Bes	Bes - Es	32/27 / 8/9 = 4/3	Bes - F	4/3 / 8/9 = 3/2
B	B - E	34/27 / 17/18 = 4/3	B - Ges	17/12 / 17/18 = 3/2

Tabel 7 Verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint als functie van de toonaard voor de 4^{e} alternatieve harmonische stemming

Het is opvallend dat er tien reine kwarten een verhouding 4/3 hebben en dat er tien reine kwinten een verhouding 3/2 hebben. De toonaarden waarvoor de verhouding van de reine kwarten 4/3 is en waarvoor gelijktijdig de verhouding van de kwinten 3/2 is, zijn de C (geen voortekens), de Des (vijf mollen), de D (twee kruizen), de F (één mol), de Ges (zes mollen), de G (één kruis), de Bes (twee mollen) en de B (vijf kruizen). Dit zijn dus acht verschillende toonaarden! Dit is vijf meer dan voor de 3^{e} alternatieve harmonische stemming.

Voor de reine kwart wijken de toonaarden Es en E af. Voor de toonaard Es vinden we een verhouding 1377/1024 = 1,34473. Dit is een factor 1,34473 / 1,33333 = 1,00855 groter dan een harmonische reine kwart. Voor de gelijkzwevende stemming is de factor $2^{5/12}$ / 4/3 = 0,33484 / 1,33333 = 1,00113. De afwijking in de reine kwart voor de toonaard Es is dus veel groter en de toonaard Es is daarom waarschijnlijk niet bruikbaar. Voor de toonaard E vinden we een verhouding 729/544 = 1,34007. Dit is een factor 1,34007 / 1,33333 = 1,00506 groter dan een harmonische reine kwart. Voor de gelijkzwevende stemming is de factor 1,00113. De afwijking in de reine kwart voor de toonaard Es is dus behoorlijk wat groter en de toonaard E is daarom waarschijnlijk ook niet bruikbaar.

Voor de reine kwint wijken de toonaarden As en A af. Voor de toonaard As vinden we een verhouding 2048/1377 = 1,48729. Dit is een factor 1,48729 / 1,5 = 0,99153 kleiner dan een harmonische reine kwart. Voor de gelijkzwevende stemming is de factor $2^{7/12}$ / 3/2 = 1,49831 / 1,5 = 0,99887. De afwijking in de reine kwart voor de toonaard As is dus veel groter en de toonaard As is daarom waarschijnlijk niet bruikbaar. Voor de toonaard A vinden we een verhouding 1088/729 = 1,49246. Dit is een factor 1,49246 / 1,5 = 0,99497 kleiner dan een harmonische reine kwint. Voor de gelijkzwevende stemming is de factor 0,99887. De afwijking in de reine kwint voor de toonaard A is dus behoorlijk wat groter en de toonaard A is daarom waarschijnlijk ook niet bruikbaar.

Op dezelfde manier als in tabel 7 de verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint bepaald zijn, werden nu ook de verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts bepaald. Voor de kleine terts zou een verhouding 6/5 moeten gelden en voor de grote terts zou een verhouding 5/4 moeten gelden. Voor elke toonaard worden nu de verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts berekend. Het resultaat wordt gegeven in tabel 8.

	kleine terts		grote terts	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - Es	32/27 / 1 = 32/27	C - E	34/27 / 1 = 34/27
Des	Des - E	34/27 / 17/16 = 32/27	Des - F	4/3 / 17/16 = 64/51
D	D - F	4/3 / 9/8 = 32/27	D - Ges	17/12 / 9/8 = 34/27
Es	Es - Ges	17/12 / 32/27 = 153/128	Es - G	3/2 / 32/27 = 81/64
E	E - G	3/2 / 34/27 = 81/68	E - As	51/32 / 34/27 = 81/64
F	F - As	51/32 / 4/3 = 153/128	F - A	27/16 / 4/3 = 81/64
Ges	Ges - A	27/16 / 17/12 = 81/68	Ges - Bes	16/9 / 17/12 = 64/51
G	G - Bes	16/9 / 3/2 = 32/27	G - B	17/9 / 3/2 = 34/27
As	As - B	17/9 / 51/32 = 32/27	As - C	2 / 51/32 = 64/51
A	A - C	2 / 27/16 = 32/27	A - Des	17/8 / 27/16 = 34/27
Bes	Bes - Des	17/8 / 16/9 = 153/128	Bes - D	9/4 / 16/9 = 81/64
B	B - D	9/4 / 17/9 = 81/68	B - Es	32/27 / 17/18 = 64/51

Tabel 8 Verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts als functie van de toonaard voor de 4^{e} alternatieve harmonische stemming

Geen van de berekende verhoudingen voor de kleine terts komt overeen met de verhouding 6/5 = 1,2. De verhouding 32/27 = 1,18519 komt zes maal voor en is aanzienlijk te klein. De verhouding 81/68 = 1,19118 komt drie maal voor en is behoorlijk te klein. De verhouding 153/128 = 1,19531 komt ook drie maal voor en is enigszins te klein.

Geen van de berekende verhoudingen voor de grote terts komt overeen met de verhouding 5/4 = 1,25. De verhouding 81/64 = 1,26563 komt vier maal voor en is aanzienlijk te groot. De verhouding 34/27 = 1,25926 komt ook vier maal voor en is behoorlijk te groot. De verhouding 64/51 = 1,25490 komt ook vier maal voor en is enigszins te groot.

De grote en de kleine tertsen zijn dus niet zuiver harmonisch maar dat was ook niet het uitgangspunt voor deze 4^{e} alternatieve harmonische stemming. Gelijkzwevende kleine tertsen zijn aanzienlijk kleiner dan harmonische kleine tertsen. Gelijkzwevende grote tertsen zijn aanzienlijk groter dan harmonische grote tertsen. Voor deze 4^{e} alternatieve harmonische stemming zitten de kleine en de grote tertsen dus dichter tegen de gelijkzwevende stemming aan en met de gelijkzwevende stemming valt ook mee te leven. Of er al dan niet een zweving optreedt tussen hogere harmonischen van tertsen is toch lastig waar te nemen omdat de gemeenschappelijke hogere harmonischen al een tamelijk hoog rangnummer hebben. Daarom lijkt het mij niet erg bezwaarlijk dat de tertsen niet zuiver harmonisch zijn.

Deze 4^{e} alternatieve harmonische stemming lijkt dus een zeer goed alternatief voor de echte harmonische stemming zoals beschreven aan het begin van deze notitie. Wat nu nog ontbreekt, is de berekening van de frequenties van de chromatische tonen wanneer aangenomen wordt dat de frequentie van de A onder de lage C, 440 Hz is.

De verhouding tussen de frequentie van de lage C en de A onder de lage C is 1 / 27/32 = 32/27 = 1,18519. Als de A een frequentie van 440 Hz heeft dan heeft de lage C dus een frequentie van 1,18519 * 440 = 521,48148 Hz. De frequenties van de overige elf chromatische tonen worden dan gevonden door de verhoudingen uit tabel 6 te vermenigvuldigen met een factor 521,48148. Het resultaat wordt gegeven in tabel 9 waarbij de waardes afgerond werden op twee decimalen achter de komma.

De frequentie volgens de gelijkzwevende stemming met de C = 521,48148 Hz als grondtoon werd ook opgenomen in tabel 9. De A heeft voor de gelijkzwevende stemming dus geen frequentie van 880 Hz als de grondtoon een C is met een frequentie van 521,48148 Hz.

	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C
f_{harm} (Hz)	521,48	554,07	586,67	618,05	656,68	695,31	738,77	782,22	831,11	880,00	927,08	985,02	1042,96
f_{gelijk}(Hz)	521,48	552,49	585,34	620,15	657,03	696,09	737,49	781,34	827,80	877,02	929,17	984,43	1042,96

Tabel 9 Frequentie voor de 4^e alternatieve harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van C

Als tabel 9 vergeleken wordt met tabel 4 dan is te zien dat de frequenties voor f_{harm} en f_{gelijk} uit tabel 9 voor de meeste tonen meer van elkaar verschillen dan voor tabel 4. Dit komt voor een deel doordat de frequentie van de grondtoon hoger is maar het feit dat er bij de 4^e alternatieve harmonische stemming veel meer toonaarden zijn waarvoor de reine kwart en de reine kwint beiden zuiver harmonisch zijn, gaat ten koste van de zuiverheid van de overige tonen. Ook hier geldt dat elk voordeel zijn nadeel heeft.

Het opvallende feit dat er tien harmonische reine kwinten zijn terwijl er maar zes zuiver gestemd worden, kan als volgt verklaard worden. Alle reine octaven worden harmonisch zuiver gestemd. Dit heeft als gevolg dat er voor elke gestemde harmonische reine kwint een harmonische reine kwart ontstaat. Bijvoorbeeld, voor de harmonische reine kwint C – G ontstaat zo de harmonische reine kwart G – C. Een harmonische reine kwart plus een grote secunde met een verhouding 9/8 levert ook een harmonische reine kwint op omdat geldt dat 4/3 * 9/8 = 3/2. Wanneer deze grote secunde verdeeld wordt in een grote kleine secunde met een verhouding 17/16 en in een kleine kleine secunde met een verhouding 18/17 en wanneer de grote kleine secunde aan de ene kant van de reine kwart zit en de kleine kleine secunde aan de andere kant van de reine kwart zit, levert dit samen dus ook een harmonische reine kwint op. Het blijkt dat dit voor de vier harmonische reine kwarten D – G, F – Bes, G – C en C – F het geval is en daarom zijn er totaal tien harmonische reine kwinten.

De harmonische reine kwart A – D heeft echter aan de A-kant een kleine kleine secunde met een verhouding 18/17 en aan de D-kant een extra kleine kleine secunde met een verhouding 256/243. De reine kwint As – Es is daarom niet zuiver harmonisch. De harmonische reine kwart Bes – Es heeft aan de Bes-kant een extra kleine kleine secunde met een verhouding 256/243 en aan de Es-kant een grote kleine secunde met een verhouding 17/16. De reine kwint A – E is daarom ook niet zuiver harmonisch. Beide afwijkende reine kwinten zijn niet aan elkaar gelijk wat ook in tabel 7 te zien is. Zij zijn behoorlijk wat kleiner dan een harmonische reine kwint en dit maakt dat tien harmonische zuiver kwinten plus twee te kleine reine kwinten toch samen zeven harmonische reine octaven opleveren. De twee te kleine onzuivere reine kwinten worden dus veroorzaakt door de twee extra kleine kleine secundes met een verhouding 256/243 en niet door de manier waarop elk van de vijf grote secundes met de verhouding 8/9 in twee kleine secundes verdeeld is.

In tabel 9 is te zien dat behalve voor de lage en de hoge C, de frequenties voor alle andere tonen afwijken van die voor de gelijkzwevende stemming. Voor de G is de verhouding 782,22 / 781,34 = 1,00113, voor de D is de verhouding 586,67 / 585,34 = 1,00227 en voor de A is de verhouding 880,00 / 877,02 = 1,00340. De verhouding neemt dus regelmatig toe naarmate de toon hoort bij een toonaard met meer kruizen. Voor de F is de verhouding 695,31 / 696,09 = 0,99880, voor de Bes is de verhouding 927,08 / 929,17 = 0,99775 en voor de Es is de verhouding 618,05 / 620,15 = 0,99661. De verhouding neemt dus regelmatig af naarmate de toon hoort bij een toonaard met meer mollen.

In tabel 9 is te zien dat van de vijf overgebleven tonen Des, E, Ges, As en B, voor de Des, de E, de Ges en de B de verhouding groter dan 1 is en dat alleen voor de As de verhouding kleiner dan 1 is. Dit is vreemd en dit moet het gevolg zijn van het feit dat de vijf grote secundes verdeeld zijn in twee kleine secundes met ongelijke verhoudingen.

Een grote secunde met een verhouding 9/8 kan ook in twee kleine secundes verdeeld worden waarvoor de verhoudingen gelijk zijn. Dit is het geval als de verhouding $9/8^{1/2}$ is. Stel dat we de vijf de grote secundes in tien kleine secundes met een verhouding $9/8^{1/2}$ verdelen. Deze optie wordt de 5^{e} alternatieve harmonische stemming genoemd. Tabel 6 verandert dan in tabel 10. Onderaan tabel 10 werd een rij toegevoegd waarin de verhouding staat voor de betreffende toon met de toon één kleine secunde lager.

As	A	Bes	B	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C	Des	D
$3/4 * 9/8^{1/2}$	27/32	8/9	$8/9 * 9/8^{1/2}$	1	$9/8^{1/2}$	9/8	32/27	$32/27 * 9/8^{1/2}$	4/3	$4/3 * 9/8^{1/2}$	3/2	$3/2 * 9/8^{1/2}$	27/16	16/9	$16/9 * 9/8^{1/2}$	2	$2 * 9/8^{1/2}$	9/4
					$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	256/243	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	256/243	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$		

Tabel 10 Frequenties voor C = 1 Hz voor de 5^{e} alternatieve harmonische stemming

Tabel 7 verandert in tabel 11

	reine kwart		reine kwint	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - F	4/3 / 1 = 4/3 = 1,33333	C - G	3/2 / 1 = 3/2 = 1,5
Des	Des - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 9/8^{1/2} = 4/3$	Des - As	$3/2 * 9/8^{1/2} / 9/8^{1/2} = 3/2$
D	D - G	3/2 / 9/8 = 4/3	D - A	27/16 / 9/8 = 3/2
Es	Es - As	$3/2 * 9/8^{1/2} / 32/27 = 1{,}34240$	Es - Bes	16/9 / 32/27 = 3/2
E	E - A	$27/16 / (32/27 * 9/8^{1/2}) = 1{,}34240$	E - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / (32/27 * 9/8^{1/2}) = 3/2$
F	F - Bes	16/9 / 4/3 = 4/3	F - C	2 / 4/3 = 3/2
Ges	Ges - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 4/3$	Ges - Des	$2 * 9/8^{1/2} / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 3/2$
G	G - C	2 / 3/2 = 4/3	G - D	9/4 / 3/2 = 3/2
As	As - Des	$2 * 9/8^{1/2} / 3/2 * 9/8^{1/2} = 4/3$	As - Es	$32/27 / (3/4 * 9/8^{1/2}) = 1{,}48987$
A	A - D	9/8 / 27/32 = 4/3	A - E	$32/27 * 9/8^{1/2} / 27/32 = 1{,}48987$
Bes	Bes - Es	32/27 / 8/9 = 4/3	Bes - F	4/3 / 8/9 = 3/2
B	B - E	$32/27 * 9/8^{1/2} / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 4/3$	B - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 3/2$

Tabel 11 Verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint als functie van de toonaard voor de 5^{e} alternatieve harmonische stemming

Er zijn nog steeds 10 toonaarden waarvoor de reine kwarten een verhouding 4/3 = 1,33333 en de reine kwinten een verhouding 3/2 = 1,5 hebben. De twee afwijkende toonaarden voor de reine kwarten zijn Es en E en daarvoor is de verhouding voor beiden 1,34240 en dus wat groter dan 1,33333. De twee afwijkende toonaarden voor de reine kwinten zijn As en A en daarvoor is de verhouding voor beiden 1,48987 en dus wat kleiner dan 1,5.

Voor deze 5^{e} alternatieve harmonische stemming zullen de kleine tertsen nog steeds kleiner zijn dan 6/5 en zullen de grote tertsen nog steeds groter zijn dan 5/4 en tabel 8 werd daarom niet ook nog eens aangepast voor dit 5^{e} alternatief.

Tabel 9 verandert in tabel 12

	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C
f_{harm} (Hz)	521,48	553,11	586,67	618,05	655,54	695,31	737,49	782,22	829,67	880,00	927,08	983,31	1042,96
f_{gelijk}(Hz)	521,48	552,49	585,34	620,15	657,03	696,09	737,49	781,34	827,80	877,02	929,17	984,43	1042,96

Tabel 12 Frequentie voor de 5^{e} alternatieve harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van C

Nu blijkt dat voor de Ges de f_{harm} gelijk is aan f_{gelijk}. De Ges hoort bij een toonaard met zes mollen. De Ges is gelijk aan de Fis en die hoort bij een toonaard met zes kruizen. Voor de Des is de verhouding 553,11 / 552,49 = 1,00112 en voor de As is de verhouding 829,67 / 827,80 = 1,00226.

De verhouding neemt dus regelmatig toe naarmate de toon hoort bij een toonaard met minder mollen. Voor de B is de verhouding 983,31 / 984,43 = 0,99886 en voor de E is de verhouding 655,54 / 657,03 = 0,99773. De verhouding neemt dus regelmatig af naarmate de toon hoort bij een toonaard met minder kruizen.

Deze verdeling van elke grote secunde in twee kleine secundes met ieder een verhouding $9/8^{1/2}$ geeft dus een regelmatigere verdeling van de vijf tonen Des, E, Ges, As en B dan bij een verdeling in een grote kleine secunde met een verhouding 17/16 en een kleine kleine secunde met een verhouding 18/17. Dit geldt ondanks het feit dat de verhoudingen 17/16 en 18/17 afgeleid kunnen worden uit de reeks met hogere harmonischen en dat dit voor de verhouding $9/8^{1/2}$ niet het geval is. Dit komt omdat bij een verhouding van $9/8^{1/2}$ voor de kleine secundes, een perfecte symmetrie rond de C gerealiseerd wordt.

Stel nu dat men deze stemming vroeger ook al gebruikte. De vraag blijft wel hoe men vroeger de vijf tonen Des, E, Ges, As en B stemde als men geen apparatuur had waarmee de frequentie nauwkeurig gemeten kon worden. Waarschijnlijk is het nog niet zo lastig om een grote secunde zodanig op het gehoor in tweeën te verdelen dat de verhouding van beide kleine secundes gelijk is. Als aanvulling kan men dan voor de vier extra reine kwinten controleren of die inderdaad harmonisch zuiver zijn. De vier reine kwarten die aan elke kant een kleine secunde met een verhouding $9/8^{1/2}$ hebben zijn de D – G, de F – Bes, de G – C en de C – F. Links en rechts van de D – G liggen de kleine secundes Des – C en G – As. De reine kwint Des – As is dus alleen zuiver harmonisch als de kleine secundes Des – C en G – As de juiste verhouding hebben. Links en rechts van de F – Bes liggen de kleine secundes E – F en Bes – B. De reine kwint E – B is dus alleen zuiver harmonisch als de kleine secundes E – F en Bes – B de juiste verhouding hebben. Links en rechts van de G – C liggen de kleine secundes Ges – G en C – Des. De reine kwint Ges – Des is dus alleen zuiver harmonisch als de kleine secundes Ges – G en C – Des de juiste verhouding hebben. Links en rechts van de C – F liggen de kleine secundes B – C en F – Ges. De reine kwint B – Ges is dus alleen zuiver harmonisch als de twee kleine secundes de juiste verhouding hebben. Op deze manier kunnen dus acht van de tien kleine secundes gecontroleerd worden. De twee kleine secundes E – F en As – A kunnen niet op deze manier gecontroleerd worden.

Deze 5e alternatieve harmonische stemming heeft dus acht toonaarden waarvoor de reine kwarten en de reine kwinten beiden harmonisch zuiver zijn. Van deze acht toonaarden liggen de G (één kruis), de D (twee kruizen), de F (één mol) en de Bes (twee mollen) centraal rond de toonaard C (geen voortekens). De overige drie toonaarden B (vijf kruizen), Des (vijf mollen) en Ges (zes mollen) zijn niet erg gangbaar. Men zou meer hebben aan nog een extra toonaard A (3 kruizen) en Es (3 mollen). Dit is mogelijk door vanuit C niet drie maar vier reine kwinten omhoog en omlaag te gaan. Dit is hetzelfde als wanneer men vanuit A één reine kwint omhoog en zeven reine kwinten omlaag gaat. Deze optie die de 6e alternatieve harmonische stemming genoemd wordt, zal nu verder beschreven worden. Hierbij wordt er eerst vanuit gegaan dat de lage C een frequentie van 1 Hz heeft.

Als men vanuit C drie maal een reine kwint omhoog gegaan is komt men bij de A. Als men vanuit A opnieuw een reine kwint omhoog gaat komt men bij de E. De frequentie van de E is dan 3/2 * 27/32 = 81/64. De verhouding van de kleine secunde tussen de Es en de E wordt dan 81/64 / 32/27 = 2187/2048 = 1,06787. De verhouding van de kleine secunde tussen de E en de F wordt dan 4/3 / 81/64 = 256/243 = 1,05350 wat dus gelijk is aan de verhouding tussen de D en de Es en tussen de A en de Bes die al bij het 5e alternatief gevonden werd.

Als men vanuit C drie maal een reine kwint omlaag gegaan is komt men bij de Es. Als men vanuit Es opnieuw een reine kwint omlaag gaat komt men bij de As. De frequentie van de As is dan 2/3 * 32/27 = 64/81. Dit is de As onder de lage C. De As tussen de lage en de hoge C is twee keer zo hoog en dus 128/81. De verhouding van de kleine secunde tussen de G en de As wordt dan 128/81 / 3/2 = 256/243 wat dus gelijk is aan de verhouding tussen de E en de F. De verhouding van de kleine secunde tussen de As en de A wordt dan 27/16 / 128/81 = 2187/2048 wat dus gelijk is aan de verhouding tussen de Es en de E.

Er blijven nu nog de drie grote secundes C – D, F – G en Bes – C over en in het midden van deze drie intervallen liggen de tonen Des, Ges en B. De frequenties van deze drie tonen worden op dezelfde manier gevonden als bij de het 5^e^ alternatief door elk van deze drie grote secundes met een verhouding 9/8 te verdelen in twee kleine secundes met een verhouding $9/8^{1/2}$. Tabel 10 verandert dan in tabel 13. Onderaan tabel 13 werd een rij toegevoegd waarin de verhouding staat voor de betreffende toon met de toon één kleine secunde lager.

As	A	Bes	B	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C	Des	D
64/81	27/32	8/9	$8/9 * 9/8^{1/2}$	1	$9/8^{1/2}$	9/8	32/27	81/64	4/3	$4/3 * 9/8^{1/2}$	3/2	128/81	27/16	16/9	$16/9 * 9/8^{1/2}$	2	$2 * 9/8^{1/2}$	9/4
					$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	256/243	2187/2048	256/243	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$	256/243	2187/2048	256/243	$9/8^{1/2}$	$9/8^{1/2}$		

Tabel 13 Frequenties voor C = 1 Hz voor de 6^e alternatieve harmonische stemming

Tabel 11 verandert in tabel 14

	reine kwart		reine kwint	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - F	4/3 / 1 = 4/3 = 1,33333	C - G	3/2 / 1 = 3/2 = 1,5
Des	Des - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 9/8^{1/2} = 4/3$	Des - As	$128/81 / 9/8^{1/2} = 1,48987$
D	D - G	3/2 / 9/8 = 4/3	D - A	27/16 / 9/8 = 3/2
Es	Es - As	128/81 / 32/27 = 4/3	Es - Bes	16/9 / 32/27 = 3/2
E	E - A	27/16 / 81/64 = 4/3	E - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / 81/64 = 1,48987$
F	F - Bes	16/9 / 4/3 = 4/3	F - C	2 / 4/3 = 3/2
Ges	Ges - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 4/3$	Ges - Des	$2 * 9/8^{1/2} / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 3/2$
G	G - C	2 / 3/2 = 4/3	G - D	9/4 / 3/2 = 3/2
As	As - Des	$2 * 9/8^{1/2} / 128/81 = 1,34240$	As - Es	32/27 / 64/81 = 3/2
A	A - D	9/8 / 27/32 = 4/3	A - E	81/64 / 27/32 = 3/2
Bes	Bes - Es	32/27 / 8/9 = 4/3	Bes - F	4/3 / 8/9 = 3/2
B	B - E	$81/64 / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 1,34240$	B - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 3/2$

Tabel 14 Verhoudingen voor de reine kwart en de reine kwint als functie van de toonaard voor de 6^e alternatieve harmonische stemming

Er zijn nog steeds 10 toonaarden waarvoor de reine kwarten een verhouding 4/3 = 1,33333 en de reine kwinten een verhouding 3/2 = 1,5 hebben. De twee afwijkende toonaarden voor de reine kwarten zijn nu As en B en daarvoor is de verhouding voor beiden 1,34240 en dus wat groter dan 1,33333. De twee afwijkende toonaarden voor de reine kwinten zijn nu Des en E en daarvoor is de verhouding voor beiden 1,48987 en dus wat kleiner dan 1,5.

Tabel 8 verandert in tabel 15.

	kleine terts		grote terts	
toonaard	interval	verhouding	interval	verhouding
C	C - Es	32/27 / 1 = 32/27 = 1,18519	C - E	81/64 / 1 = 81/64 = 1,26563
Des	Des - E	$81/64 / 9/8^{1/2} = 1,19324$	Des - F	$4/3 / 9/8^{1/2} = 1,25708$
D	D - F	4/3 / 9/8 = 32/27 = 1,18519	D - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 9/8 = 1,25708$
Es	Es - Ges	$4/3 * 9/8^{1/2} / 32/27 = 1,19324$	Es - G	3/2 / 32/27 = 81/64 = 1,26563
E	E - G	3/2 / 81/64 = 32/27 = 1,18519	E - As	128/81 / 81/64 = 8192/6561 = 1,24859
F	F - As	128/81 / 4/3 = 32/27 = 1,18519	F - A	27/16 / 4/3 = 81/64 = 1,26563
Ges	Ges - A	$27/16 / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 1,19324$	Ges - Bes	$16/9 / (4/3 * 9/8^{1/2}) = 1,25708$
G	G - Bes	16/9 / 3/2 = 32/27 = 1,18519	G - B	$16/9 * 9/8^{1/2} / 3/2 = 1,25708$
As	As - B	$8/9 * 9/8^{1/2} / 64/81 = 1,19324$	As - C	1 / 64/81 = 81/64 = 1,26563
A	A - C	1 / 27/32 = 32/27 = 1,18519	A - Des	$9/8^{1/2} / 27/32 = 1,25708$
Bes	Bes - Des	$9/8^{1/2} / 8/9 = 1,19324$	Bes - D	9/8 / 8/9 = 81/64 = 1,26563
B	B - D	$9/8 / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 1,19324$	B - Es	$32/27 / (8/9 * 9/8^{1/2}) = 1,25708$

Tabel 15 Verhoudingen voor de kleine terts en de grote terts als functie van de toonaard voor de 6^e alternatieve harmonische stemming

Geen van de berekende verhoudingen voor de kleine terts komt overeen met de verhouding 6/5 = 1,2. De verhouding 32/27 = 1,18519 komt zes maal voor en is aanzienlijk te klein. De verhouding 1,19324 komt ook zes maal voor en is enigszins te klein.

Geen van de berekende verhoudingen voor de grote terts komt overeen met de verhouding 5/4 = 1,25. De verhouding 81/64 = 1,26563 komt vijf maal voor en is aanzienlijk te groot. De verhouding 1,25708 komt zes maal voor en is behoorlijk te groot. De verhouding 8192/6561 = 1,24859 komt één maal voor en is enigszins te klein.

De grote en de kleine tertsen zijn dus niet zuiver harmonisch maar dat was ook niet het uitgangspunt voor deze 6e alternatieve harmonische stemming. Gelijkzwevende kleine tertsen zijn aanzienlijk kleiner dan harmonische kleine tertsen. Gelijkzwevende grote tertsen zijn aanzienlijk groter dan harmonische grote tertsen. Voor deze 6e alternatieve harmonische stemming zitten de kleine en de grote tertsen dus dichter tegen de gelijkzwevende stemming aan en met de gelijkzwevende stemming valt ook mee te leven. Of er al dan niet een zweving optreedt tussen hogere harmonischen van tertsen is toch lastig waar te nemen omdat de gemeenschappelijke hogere harmonischen al een tamelijk hoog rangnummer hebben. Daarom lijkt het mij niet erg bezwaarlijk dat de tertsen niet zuiver harmonisch zijn.

Tabel 12 verandert in tabel 16

	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A	Bes	B	C
f_{harm} (Hz)	521,48	553,11	586,67	618,05	660,00	695,31	737,49	782,22	824,07	880,00	927,08	983,31	1042,96
f_{gelijk}(Hz)	521,48	552,49	585,34	620,15	657,03	696,09	737,49	781,34	827,80	877,02	929,17	984,43	1042,96
Afw (%)	0	- 0,11	- 0,23	+ 0,34	- 0,45	+ 0,11	0	- 0,11	+ 0,45	- 0,34	+ 0,23	+ 0,11	0
Afw (c)	0	- 1,9	- 3,9	+ 5,7	- 7,6	+ 1,9	0	- 1.9	+ 7,6	- 5,7	+ 3,9	+ 1,9	0

Tabel 16 Frequentie voor de 6e alternatieve harmonische stemming en de gelijkzwevende stemming voor tonen uit de chromatische toonladder van C

De verhouding f_{harm} / f_{gelijk} voor de E is nu 660,00 / 657,03 = 1,00452 wat aansluit op de bij het 5e alternatief berekende verhoudingen voor de G, de D en de A. De verhouding f_{harm} / f_{gelijk} voor de As is nu 824,07 / 827,80 = 0,99549 wat aansluit op de bij het 5e alternatief berekende verhoudingen voor de F, de Bes en de Es.

Het lijkt handig om ook de procentuele afwijking te geven voor dit 6e alternatief. Als de harmonische stemming als zuiver beschouwd wordt dan wordt de afwijking gegeven door:

$$\text{Afwijking} = 100\,(f_{gelijk} - f_{harm}) / f_{harm} \quad (\%) \qquad (1)$$

De berekende afwijking in procenten (Afw (%)) wordt vermeld in de vierde rij van tabel 16. De procentuele afwijking tussen twee gelijkzwevende tonen die een kleine secunde van elkaar verschillen is ongeveer 5,946 %. Een procentuele afwijking van 0,1 % is dus ongeveer 1/60 van een halve toonafstand. De absolute waardes van de afwijkingen blijken symmetrisch verdeeld zijn t. o. v. de Ges en t. o. v. de C. De grootste afwijkingen zitten in de E en de As. De afwijking kan ook in cent worden gegeven. Hierbij geldt dat een rein octaaf 1200 cent is. Dit betekent dat een gelijkzwevende kleine secunde 100 cent is. Daardoor geldt dat:

$$5{,}946\ \% = 100 \text{ cent ofte wel } 1\ \% = 16{,}82 \text{ cent} \qquad (2)$$

De berekende afwijking in cent (Afw (c)) wordt gegeven in de vijfde rij van tabel 16.

In tabel 14 is te zien dat deze 6e alternatieve harmonische stemming voor de zeven toonaarden Es (3 mollen), Bes (2 mollen), F (1 mol), C (geen voortekens), G (1 kruis), D (2 kruizen) en A (3 kruizen) gelijktijdig harmonische kwarten en kwinten oplevert. Er is nu nog maar één extra toonaard, namelijk Ges (6 mollen), waar dit ook het geval voor is.

De consequentie van een stemming waarvoor er vanuit C vier reine kwinten omhoog en vier reine kwinten omlaag gestemd wordt, is wel dat we nu drie verschillende kleine secundes krijgen namelijk 256/243 = 1,05350 (vier maal), $9/8^{1/2}$ = 1,06066 (zes maal) en 2187/2048 = 1,06787 (twee maal). Een gelijkzwevende kleine secunde is $2^{1/12}$ = 1,05946. De factor van de kleinste kleine secunde met de gelijkzwevende kleine secunde is dus 1,05350 / 1,05946 = 0,99437. De factor van de grootste kleine secunde met de gelijkzwevende kleine secunde is dus 1,06787 / 1,05946 = 1,00794. De grootse en de kleinste kleine secunde wijken dus behoorlijk af van de gelijkzwevende kleine secunde.

Voor “de harmonische stemming”, zoals die in het begin van deze notitie behandeld werd, vonden we echter vijf verschillende kleine secundes met een verhouding 16/15, 17/16, 18/17, 19/18 en 20/19. Voor de kleinste kleine secunde 20/19 = 1,05263 krijgen we een factor 1,05263 / 1,05946 = 0,99355. Deze factor wijkt dus nog meer van 1 af dan voor het 6e alternatief. Voor de grootse kleine secunde 16/15 = 1,06667 krijgen we een factor 1,06667 / 1,05946 = 1,00681. Deze factor wijkt dus wat minder van 1 af dan voor het 6e alternatief. Wat betreft de variatie in de kleine secundes zijn beide stemmingen dus met elkaar vergelijkbaar en ongeveer even slecht. De harmonische stemming is echter alleen bruikbaar voor de toonaard A terwijl dit 6e alternatief acht bruikbare toonaarden heeft. Mijn voorkeur gaat uit naar dit 6e alternatief als ik prijs zou stellen op een harmonische stemming met zo veel mogelijk bruikbare toonaarden rond de C.

Theoretisch is het ook nog mogelijk om vanuit C, vijf harmonische reine kwinten omhoog en omlaag te stemmen maar dan wijken de frequenties van de Des en de B toch wel erg ver af van de frequenties volgens de gelijkzwevende stemming en dat lijkt me niet meer toelaatbaar. Daarom vind ik dat je niet verder moet gaan dan vanuit C vier harmonische reine kwinten omhoog en omlaag.

Ik denk dat dit 6e alternatief of iets wat erop lijkt in het verleden gebruikt is om klavierinstrumenten te stemmen en dat pianostemmers die ook nu nog een klavierinstrument harmonisch stemmen, echt niet de harmonische stemming met harmonische kleine en grote tertsen zullen gebruiken. Als ze dat zouden doen dan zijn ze binnen een paar weken al hun klanten kwijt omdat het instrument in alle gebruikelijke toonaarden behalve die van de grondtoon, verschrikkelijk vals zal zijn. Uiteindelijk vind ik de gelijkzwevende stemming nog steeds het beste omdat daarmee in alle twaalf toonaarden te spelen is zonder dat er echt hinderlijke onzuiverheden optreden.

Van dit 6e alternatief werd een aparte notitie gemaakt getiteld “De harmonische stemming voor klavierinstrumenten”. Van de harmonische stemming gebaseerd op de 1e t/m de 20e hogere harmonische waar deze notitie “Harmonisch intoneren” mee begint, werd ook een aparte notitie gemaakt getiteld “De harmonische stemming”. Beide notities staan op mijn website: www.kdwindturbines.nl onder het menu “No wind energy”.

In beide aparte notities wordt dieper op de materie ingegaan. Er wordt vanuit gegaan dat de C en niet de A de grondtoon is wat gangbaarder is voor harmonische stemmingen. Voor alle gebruikelijke toonaarden wordt berekend hoe groot de reine kwint, de reine kwart, de grote terts en de kleine terts zijn. Voor elke gebruikelijke toonaard wordt ook berekend hoe groot de procentuele afwijking is voor elke individuele toon.